

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 7 maggio 1905.

P. BLASERNA, Presidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Sull'arbitrarietà delle caratteristiche nelle formole di addizione delle funzioni $\wp$ di una variabile.* Nota del Corrispondente ALFREDO CAPELLI.

Le formole più importanti relative all'addizione delle funzioni $\wp$ di una variabile:

$$\wp_{\gamma, g}(z) \equiv \wp \left[\begin{matrix} \gamma \\ g \end{matrix} \right] (z) = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} e^{\pi i \omega \left(n + \frac{\gamma}{2} \right)^2 + 2\pi i \left(n + \frac{\gamma}{2} \right) \left(z + \frac{g}{2} \right)}$$

per valori interi delle caratteristiche, cioè le formole analoghe alle formole fondamentali di Jacobi, le formole di addizione propriamente dette, le relazioni *a tre termini*, ecc., si possono riassumere in poche formole generali, dalle quali si deducono poi tutte immediatamente con semplici particolarizzazioni delle caratteristiche.

Mi è sembrato importante di ricercare fino a qual punto queste formole generali, pur mantenendone *la forma* possibilmente inalterata, possano sussistere anche per valori non interi delle caratteristiche. In ciò che segue mi propongo appunto di dimostrare come tali formole sussistano inalterate

salvo alcune lievi restrizioni, anche per valori reali od imaginari quali si vogliano delle caratteristiche.

Così, ad esempio, le formole analoghe alla formola fondamentale di Jacobi sono tutte contenute (cfr. § III) nell'unico tipo:

$$\begin{aligned} & (-1)^{\varepsilon s + \varepsilon + \eta} \prod_{\rho=1}^{\rho=4} \mathfrak{P}_{\gamma_{\rho+\varepsilon}, g_{\rho+\eta}}(z_{\rho}) \mp (-1)^{\varepsilon' s + \varepsilon' + \eta'} \prod_{\rho=1}^{\rho=4} \mathfrak{P}_{\gamma_{\rho+\varepsilon'}, g_{\rho+\eta'}}(z_{\rho}) = \\ & \pm (-1)^{\varepsilon'' s + \varepsilon'' + \eta''} \prod_{\rho=1}^{\rho=4} \mathfrak{P}_{\gamma_{\rho+\varepsilon''}, g_{\rho+\eta''}}(z_{\rho}') - (-1)^{\varepsilon''' s + \varepsilon''' + \eta'''} \prod_{\rho=1}^{\rho=4} \mathfrak{P}_{\gamma_{\rho+\varepsilon'''}, g_{\rho+\eta'''}}(z_{\rho}') \end{aligned}$$

essendo le ε, η dei numeri interi opportunamente scelti, le γ_{ρ}, g_{ρ} ($\rho = 1, 2, 3, 4$) dei numeri interi qualsivogliano e gli argomenti z_{ρ}, z_{ρ}' ($\rho = 1, 2, 3, 4$) legati dalle relazioni:

$$\begin{aligned} 2z_1' &= z_1 - z_2 - z_3 - z_4 \\ 2z_2' &= -z_1 + z_2 - z_3 - z_4 \\ 2z_3' &= -z_1 - z_2 + z_3 - z_4 \\ 2z_4' &= -z_1 - z_2 - z_3 + z_4 \end{aligned} \quad (\alpha)$$

Ora questo stesso tipo generale di formola sussiste, come vedremo, *assolutamente inalterato*, anche per valori reali od imaginarii qualsivogliano delle caratteristiche γ_{ρ}, g_{ρ} ($\rho = 1, 2, 3, 4$), salvo la sola restrizione che siano numeri interi le semisomme:

$$\sigma = \frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4) \quad , \quad s = \frac{1}{2}(g_1 + g_2 + g_3 + g_4).$$

Soltanto quando si volesse che questa formola generale sussistesse per valori del tutto arbitrarii delle γ_{ρ}, g_{ρ} ($\rho = 1, 2, 3, 4$), sarebbe necessario introdurre nella forma da noi data alcune opportune modificazioni.

Nel § IV dedurremo facilmente dalla formola ora menzionata la formola generale di addizione propriamente detta, cioè un'espressione di

$$\mathfrak{P}_{\gamma_1, g_1}(u + v), \mathfrak{P}_{\gamma_2, g_2}(u - v)$$

che sussiste per valori del tutto arbitrarii delle $\gamma_1, \gamma_2, g_1, g_2$.

Finalmente nel § V tratteremo, sempre applicando gli stessi principii, la questione analoga per le formole cosiddette *a tre termini*.

Circa le modificazioni cui si è sopra accennato, mi riservo aggiungere qualche parola in altra occasione. Del resto esse risultano abbastanza facilmente dagli stessi procedimenti dimostrativi dei quali ci siamo qui serviti.

I.

1. Partiamo dalla relazione (1):

$$(1) \quad 2 \prod_{\rho=1}^{\rho=4} \mathfrak{P}_{\gamma_{\rho}, g_{\rho}}(z_{\rho}) = \prod_{\rho=1}^{\rho=4} \mathfrak{P}_{\gamma'_{\rho}, g'_{\rho}}(z'_{\rho}) + \prod_{\rho=1}^{\rho=4} \mathfrak{P}_{\gamma'_{\rho-1}, g'_{\rho}}(z'_{\rho}) + \\ + e^{\frac{\pi i}{2} \Sigma \gamma'} \prod_{\rho=1}^{\rho=4} \mathfrak{P}_{\gamma'_{\rho}, g'_{\rho-1}}(z'_{\rho}) - e^{\frac{\pi i}{2} \Sigma \gamma'} \prod_{\rho=1}^{\rho=4} \mathfrak{P}_{\gamma'_{\rho-1}, g'_{\rho-1}}(z'_{\rho})$$

in cui le $z_{\rho}, \gamma_{\rho}, g_{\rho}$ ($\rho = 1, 2, 3, 4$) sono affatto arbitrarie e le $z'_{\rho}, \gamma'_{\rho}, g'_{\rho}$ sono ad esse legate dalle relazioni (α) e dalle relazioni analoghe:

$$(\alpha)' \quad \begin{array}{ll} 2\gamma'_1 = \gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4 & 2g'_1 = g_1 - g_2 - g_3 - g_4 \\ 2\gamma'_2 = -\gamma_1 + \gamma_2 - \gamma_3 - \gamma_4 & 2g'_2 = -g_1 + g_2 - g_3 - g_4 \\ 2\gamma'_3 = -\gamma_1 - \gamma_2 + \gamma_3 - \gamma_4 & 2g'_3 = -g_1 - g_2 + g_3 - g_4 \\ 2\gamma'_4 = -\gamma_1 - \gamma_2 - \gamma_3 + \gamma_4 & 2g'_4 = -g_1 - g_2 - g_3 + g_4 \end{array}$$

Posto per brevità:

$$\mathfrak{P}_{\gamma_1, g_1}(z_1) \cdot \mathfrak{P}_{\gamma_2, g_2}(z_2) \cdot \mathfrak{P}_{\gamma_3, g_3}(z_3) \cdot \mathfrak{P}_{\gamma_4, g_4}(z_4) = [\gamma, g] \\ \mathfrak{P}_{\gamma_1, g_1}(z'_1) \cdot \mathfrak{P}_{\gamma_2, g_2}(z'_2) \cdot \mathfrak{P}_{\gamma_3, g_3}(z'_3) \cdot \mathfrak{P}_{\gamma_4, g_4}(z'_4) = [\gamma, g]'$$

noi la scriveremo anche per maggior comodità come segue:

$$(1)' \quad 2[\gamma, g] = [\gamma, g]' + [\gamma - 1, g]' + \\ + e^{\frac{\pi i}{2} \Sigma \gamma'} [\gamma', g' - 1]' - e^{\frac{\pi i}{2} \Sigma \gamma'} [\gamma' - 1, g' - 1]'$$

2. Se poniamo inoltre

$$(\beta) \quad \begin{array}{l} \sigma = \frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4) = -\frac{1}{2}(\gamma'_1 + \gamma'_2 + \gamma'_3 + \gamma'_4) \\ s = \frac{1}{2}(g_1 + g_2 + g_3 + g_4) = -\frac{1}{2}(g'_1 + g'_2 + g'_3 + g'_4) \end{array}$$

i due ultimi gruppi nelle formole (α) si possono scrivere:

$$\gamma'_{\rho} = \gamma_{\rho} - \sigma, \quad g'_{\rho} = g_{\rho} - s, \quad (\rho = 1, 2, 3, 4)$$

(1) Cfr.: *Sulle relazioni algebriche fra le funzioni $\mathfrak{P}$ di una variabile e sul teorema di addizione* (Rend. dei Lincei, 2° sem. 1902, pag. 261). Le piccole differenze fra la formola ivi data e quella qui riportata sono dovute specialmente all'aver surrogato la sostituzione ortogonale di Jacobi colla sostituzione definita dalle (α) che mi è sembrata meglio appropriata al nostro scopo a cagione della sua perfetta simmetria.

e per conseguenza la (1)'

$$2[\gamma, g] = [\gamma - \sigma, g - s]' + [\gamma - \sigma - 1, g - s]' + \\ + e^{-\pi i \sigma} [\gamma - \sigma, g - s - 1]' - e^{-\pi i \sigma} [\gamma - \sigma - 1, g - s - 1]'$$

o, più brevemente:

$$(I) \quad 2[\gamma, g] = \sum_{\varepsilon=0}^{\varepsilon=1} \sum_{\eta=0}^{\eta=1} e^{-\pi i(\sigma+\varepsilon)\eta} [\gamma - \sigma - \varepsilon, g - s - \eta]'$$

II.

1. Noi supporremo d'ora innanzi che le γ_p e g_p ($p = 1, 2, 3, 4$) vengano scelte in guisa che i numeri σ ed s , definiti dalle (β), riescano *interi*.

Posto allora:

$$(1) \quad -(\sigma + \varepsilon) \equiv \varepsilon' \quad , \quad -(s + \eta) \equiv \eta' \quad (\text{mod. } 2)$$

dove le ε' ed η' possono ricevere soltanto i valori 0 ed 1, la formola (I) si potrà scrivere (¹)

$$2[\gamma, g] = \sum_{\varepsilon=0}^{\varepsilon=1} \sum_{\eta=0}^{\eta=1} (-1)^{(\sigma+\varepsilon)\eta} [\gamma + \varepsilon', g + \eta']'$$

od anche per le (1):

$$2[\gamma, g] = \sum_{\varepsilon=0}^{\varepsilon=1} \sum_{\eta=0}^{\eta=1} (-1)^{\varepsilon'(\eta'+s)} [\gamma + \varepsilon', g + \eta']'$$

È però agevole di riconoscere, se si rifletta che le ε' , η' percorrono, fatta astrazione dall'ordine, precisamente quegli stessi quattro sistemi di valori che sono percorsi dalle ε , η , che si potrà anche scrivere:

$$(2) \quad 2[\gamma, g] = \sum_{\varepsilon=0}^{\varepsilon=1} \sum_{\eta=0}^{\eta=1} (-1)^{\varepsilon(\eta+s)} [\gamma + \varepsilon, g + \eta]'$$

2. Se ora con ε' ed η' intendiamo due interi qualsivogliano e se in

(¹) Si tengano presenti le formole:

$$\mathfrak{F}_{\gamma \pm 2, g}(u) = \mathfrak{F}_{\gamma, g}(u) \quad , \quad \mathfrak{F}_{\gamma, g \pm 2}(u) = e^{\pm \pi i \gamma} \mathfrak{F}_{\gamma, g}(u)$$

valide per qualsiasi valore di γ e di g .

quest'ultima formola si accrescano tutte le γ di ε' e tutte le g di η' , si ottiene:

$$2[\gamma + \varepsilon', g + \eta'] = \sum_{\varepsilon=0}^{\varepsilon=1} \sum_{\eta=0}^{\eta=1} (-1)^{(\varepsilon'+\varepsilon'')(\eta'+\eta''+s)} [\gamma + \varepsilon'', g + \eta'']$$

dove le ε'', η'' hanno i valori 0 od 1 secondo le congruenze:

$$\varepsilon + \varepsilon' \equiv \varepsilon'' \quad , \quad \eta + \eta' \equiv \eta'' \quad (\text{mod. } 2)$$

Pertanto si potrà anche scrivere, per una ragione analoga a quella cui si è accennato dianzi:

$$(II) \quad 2[\gamma + \varepsilon', g + \eta'] = \sum_{\varepsilon=0}^{\varepsilon=1} \sum_{\eta=0}^{\eta=1} (-1)^{(\varepsilon+\varepsilon')(\eta+\eta'+s)} [\gamma + \varepsilon, g + \eta].$$

3. Se (ε, η) ed (ε', η') sono due coppie qualunque di numeri interi, purchè fra loro distinte (mod. 2), si ha, come è facile riconoscere:

$$(\varepsilon + \varepsilon')(\eta + \eta') \equiv \varepsilon + \varepsilon' + \eta + \eta' + 1 \quad (\text{mod. } 2)$$

Si vede pertanto che alla (II) si può anche dare la forma:

$$2[\gamma + \varepsilon', g + \eta'] = 2[\gamma + \varepsilon', g + \eta'] - \\ - (-1)^{(s+1)\varepsilon'+\eta'} \sum_{\varepsilon=0}^{\varepsilon=1} \sum_{\eta=0}^{\eta=1} (-1)^{(s+1)\varepsilon+\eta} [\gamma + \varepsilon, g + \eta]$$

d'onde, scambiando, come è lecito, le z colle z' :

$$2. (-1)^{(s+1)\varepsilon'+\eta'} \{ [\gamma + \varepsilon', g + \eta'] - [\gamma + \varepsilon', g + \eta'] \} = \\ (II)' \quad = \sum_{\varepsilon=0}^{\varepsilon=1} \sum_{\eta=0}^{\eta=1} (-1)^{(s+1)\varepsilon+\eta} [\gamma + \varepsilon, g + \eta].$$

Questa nuova forma della (II) è notevole, inquantochè ci dice che: *il valore dell'espressione*

$$(-1)^{(s+1)\varepsilon+\eta} \left\{ \prod_{\rho=1}^{\rho=4} \mathfrak{A} \left[\begin{matrix} \gamma_{\rho} + \varepsilon \\ g_{\rho} + \eta \end{matrix} \right] (z_{\rho}) - \prod_{\rho=1}^{\rho=4} \mathfrak{A} \left[\begin{matrix} \gamma_{\rho} + \varepsilon \\ g_{\rho} + \eta \end{matrix} \right] (z'_{\rho}) \right\}$$

è del tutto indipendente dalla scelta dei numeri interi ε ed η .

III.

1. Supposto che

$$(0, 0) \quad , \quad (\varepsilon', \eta') \quad , \quad (\varepsilon'', \eta'') \quad , \quad (\varepsilon''', \eta''')$$

siano quattro coppie di numeri interi fra loro distinte (mod. 2), la (2) del precedente § si può svolgere come segue:

$$(1) \quad 2[\gamma, g] = [\gamma, g]' + (-1)^{\varepsilon'(\eta' + s)} [\gamma + \varepsilon', g + \eta']' + \\ + (-1)^{\varepsilon''(\eta'' + s)} [\gamma + \varepsilon'', g + \eta'']' + (-1)^{\varepsilon'''(\eta''' + s)} [\gamma + \varepsilon''', g + \eta''']'$$

e così la (II):

$$2[\gamma + \varepsilon', g + \eta'] = (-1)^{\varepsilon'(\eta' + s)} [\gamma, g]' + [\gamma + \varepsilon', g + \eta']' + \\ + (-1)^{(\varepsilon'' + \varepsilon')(\eta'' + \eta' + s)} [\gamma + \varepsilon'', g + \eta'']' + \\ + (-1)^{(\varepsilon''' + \varepsilon')(\eta''' + \eta' + s)} [\gamma + \varepsilon''', g + \eta''']'$$

il che, moltiplicando i due membri per $(-1)^{\varepsilon'(\eta' + s)}$ ed osservando che

$$\eta''\varepsilon' + \eta'\varepsilon'' \equiv 1, \quad \eta'''\varepsilon' + \eta'\varepsilon''' \equiv 1 \quad (\text{mod. } 2),$$

si può anche scrivere

$$(2) \quad 2(-1)^{\varepsilon'(\eta' + s)} [\gamma + \varepsilon', g + \eta'] = [\gamma, g]' + (-1)^{\varepsilon'(\eta' + s)} [\gamma + \varepsilon', g + \eta']' - \\ - (-1)^{\varepsilon''(\eta'' + s)} [\gamma + \varepsilon'', g + \eta'']' - (-1)^{\varepsilon'''(\eta''' + s)} [\gamma + \varepsilon''', g + \eta''']'$$

Dalle formole (1) e (2) segue ora sommando membro a membro:

$$(III) \quad [\gamma, g] + (-1)^{\varepsilon'(\eta' + s)} [\gamma + \varepsilon', g + \eta'] = [\gamma, g]' + \\ + (-1)^{\varepsilon'(\eta' + s)} [\gamma + \varepsilon', g + \eta']'$$

e sottraendo invece membro a membro:

$$(III)' \quad [\gamma, g] - (-1)^{\varepsilon'(\eta' + s)} [\gamma + \varepsilon', g + \eta'] = \\ = (-1)^{\varepsilon''(\eta'' + s)} [\gamma + \varepsilon'', g + \eta'']' + (-1)^{\varepsilon'''(\eta''' + s)} [\gamma + \varepsilon''', g + \eta''']'$$

2. Le formole (III) e (III)' sono contenute, come sarebbe facile di dimostrare, nell'unica formola più generale:

$$(-1)^{\varepsilon s + \varepsilon' \eta} [\gamma + \varepsilon, g + \eta] = (-1)^{\varepsilon' s + \varepsilon' \eta'} [\gamma + \varepsilon', g + \eta'] = \\ = (-1)^{\varepsilon'' s + \varepsilon'' \eta''} [\gamma + \varepsilon'', g + \eta'']' - (-1)^{\varepsilon''' s + \varepsilon''' \eta'''} [\gamma + \varepsilon''', g + \eta''']'$$

nella quale si dovranno prendere i segni inferiori quando:

$$(\varepsilon, \eta), \quad (\varepsilon', \eta'), \quad (\varepsilon'', \eta''), \quad (\varepsilon''', \eta''')$$

siano quattro coppie arbitrarie di numeri interi, purchè distinte fra loro (mod. 2); si dovranno prendere invece i segni superiori quando siano soddisfatte le condizioni:

$$(\varepsilon'', \eta'') \equiv (\varepsilon, \eta), \quad (\varepsilon''', \eta''') \equiv (\varepsilon', \eta') \quad (\text{mod. } 2)$$

Rammentiamo che in tutte queste formole le caratteristiche γ_ρ, g_ρ ($\rho = 1, 2, 3, 4$) sono assoggettate alle sole condizioni che

$$\frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4) = \sigma \quad \text{ed} \quad \frac{1}{2}(g_1 + g_2 + g_3 + g_4) = s$$

siano numeri interi.

IV.

1. Lasciando *affatto arbitrarie* le $\gamma_1, \gamma_2, g_1, g_2$ e prendendo:

$$\gamma_3 = \mu - \gamma_1 - \gamma_2, \quad g_3 = m - g_1 - g_2, \quad \gamma_4 = \mu, \quad g_4 = m \\ \varepsilon' = 1 - \mu, \quad \eta' = 1 - m$$

dove μ ed m siano due *interi* qualsivogliano, pel momento non entrambi $\equiv 1 \pmod{2}$, cosicchè:

$$\sigma = \mu, \quad s = m;$$

ponendo inoltre

$$z_1 = u + v, \quad z_2 = u - v, \quad z_3 = 0, \quad z_4 = 0$$

dimodochè:

$$z'_1 = v, \quad z'_2 = -v, \quad z'_3 = -u, \quad z'_4 = -u,$$

la formola (III) ci dà:

$$\begin{aligned} & \mathfrak{P} \left[\begin{matrix} \gamma_1 \\ g_1 \end{matrix} \right] (u + v) \cdot \mathfrak{P} \left[\begin{matrix} \gamma_2 \\ g_2 \end{matrix} \right] (u - v) \cdot \mathfrak{P} \left[\begin{matrix} \gamma_1 + \gamma_2 - \mu \\ g_1 + g_2 - m \end{matrix} \right] (0) \cdot \mathfrak{P} \left[\begin{matrix} \mu \\ m \end{matrix} \right] (0) = \\ & = \mathfrak{P} \left[\begin{matrix} \gamma_1 \\ g_1 \end{matrix} \right] (v) \cdot \mathfrak{P} \left[\begin{matrix} \gamma_2 \\ g_2 \end{matrix} \right] (-v) \cdot \mathfrak{P} \left[\begin{matrix} \gamma_1 + \gamma_2 - \mu \\ g_1 + g_2 - m \end{matrix} \right] (u) \cdot \mathfrak{P} \left[\begin{matrix} \mu \\ m \end{matrix} \right] (u) + \\ & + (-1)^\mu \mathfrak{P} \left[\begin{matrix} \gamma_1 + 1 - \mu \\ g_1 + 1 - m \end{matrix} \right] (v) \cdot \mathfrak{P} \left[\begin{matrix} \gamma_2 + 1 - \mu \\ g_2 + 1 - m \end{matrix} \right] (-v) \times \\ & \times \mathfrak{P} \left[\begin{matrix} \gamma_1 + \gamma_2 - 1 \\ g_1 + g_2 - 1 \end{matrix} \right] (u) \cdot \mathfrak{P}_{11}(u). \end{aligned} \tag{IV}$$

Del resto questa formola sussiste poi senza eccezioni qualunque siano gli interi m e μ ; giacchè per $m \equiv \mu \equiv 1 \pmod{2}$ si riduce all'identità.

2. Fatte le stesse posizioni, la formola (III)' ci dà invece:

$$\begin{aligned} & \mathfrak{P} \left[\begin{matrix} \gamma_1 \\ g_1 \end{matrix} \right] (u + v) \cdot \mathfrak{P} \left[\begin{matrix} \gamma_2 \\ g_2 \end{matrix} \right] (u - v) \cdot \mathfrak{P} \left[\begin{matrix} \gamma_1 + \gamma_2 - \mu \\ g_1 + g_2 - m \end{matrix} \right] (0) \cdot \mathfrak{P} \left[\begin{matrix} \mu \\ m \end{matrix} \right] (0) = \\ & (-1)^{\varepsilon''(\eta''+m)} \mathfrak{P} \left[\begin{matrix} \gamma_1 + \varepsilon'' \\ g_1 + \eta'' \end{matrix} \right] (v) \cdot \mathfrak{P} \left[\begin{matrix} \gamma_2 + \varepsilon'' \\ g_2 + \eta'' \end{matrix} \right] (-v) \times \\ & \times \mathfrak{P} \left[\begin{matrix} \gamma_1 + \gamma_2 - \mu - \varepsilon'' \\ g_1 + g_2 - m - \eta'' \end{matrix} \right] (u) \cdot \mathfrak{P} \left[\begin{matrix} \mu + \varepsilon'' \\ m + \eta'' \end{matrix} \right] (-u) + \\ & + (-1)^{\varepsilon'''(\eta''' + m)} \mathfrak{P} \left[\begin{matrix} \gamma_1 + \varepsilon''' \\ g_1 + \eta''' \end{matrix} \right] (v) \cdot \mathfrak{P} \left[\begin{matrix} \gamma_2 + \varepsilon''' \\ g_2 + \eta''' \end{matrix} \right] (-v) \times \\ & \times \mathfrak{P} \left[\begin{matrix} \gamma_1 + \gamma_2 - \mu - \varepsilon''' \\ g_1 + g_2 - m - \eta''' \end{matrix} \right] (u) \cdot \mathfrak{P} \left[\begin{matrix} \mu + \varepsilon''' \\ m + \eta''' \end{matrix} \right] (-u). \end{aligned}$$

Osservando però che:

$$\begin{aligned} \mathfrak{P} \left[\begin{matrix} \mu + \varepsilon'' \\ m + \eta'' \end{matrix} \right] (-u) &= (-1)^{m(\mu + \varepsilon'')} \mathfrak{P} \left[\begin{matrix} \mu - \varepsilon'' \\ m - \eta'' \end{matrix} \right] (u) = \\ &= (-1)^{m\varepsilon''} \mathfrak{P} \left[\begin{matrix} \mu - \varepsilon'' \\ m - \eta'' \end{matrix} \right] (u), \end{aligned}$$

si scriverà meglio come segue:

$$\begin{aligned} \mathfrak{P} \left[\begin{matrix} \gamma_1 \\ g_1 \end{matrix} \right] (u + v) \cdot \mathfrak{P} \left[\begin{matrix} \gamma_2 \\ g_2 \end{matrix} \right] (u - v) \cdot \mathfrak{P} \left[\begin{matrix} \mu \\ m \end{matrix} \right] (0) \cdot \mathfrak{P} \left[\begin{matrix} \gamma_1 + \gamma_2 - \mu \\ g_1 + g_2 - m \end{matrix} \right] (0) = \\ = (-1)^{\varepsilon''\eta''} \mathfrak{P} \left[\begin{matrix} \gamma_1 + \varepsilon'' \\ g_1 + \eta'' \end{matrix} \right] (v) \cdot \mathfrak{P} \left[\begin{matrix} \gamma_2 + \varepsilon'' \\ g_2 + \eta'' \end{matrix} \right] (-v) \times \\ (IV)' \quad \times \mathfrak{P} \left[\begin{matrix} \mu - \varepsilon'' \\ m - \eta'' \end{matrix} \right] (u) \cdot \mathfrak{P} \left[\begin{matrix} \gamma_1 + \gamma_2 - \mu - \varepsilon'' \\ g_1 + g_2 - m - \eta'' \end{matrix} \right] (u) + \\ + (-1)^{\varepsilon'''\eta'''} \mathfrak{P} \left[\begin{matrix} \gamma_1 + \varepsilon''' \\ g_1 + \eta''' \end{matrix} \right] (v) \cdot \mathfrak{P} \left[\begin{matrix} \gamma_2 + \varepsilon''' \\ g_2 + \eta''' \end{matrix} \right] (-v) \times \\ \times \mathfrak{P} \left[\begin{matrix} \mu - \varepsilon''' \\ m - \eta''' \end{matrix} \right] (u) \cdot \mathfrak{P} \left[\begin{matrix} \gamma_1 + \gamma_2 - \mu - \varepsilon''' \\ g_1 + g_2 - m - \eta''' \end{matrix} \right] (u). \end{aligned}$$

Rammentiamo che in queste formole ⁽¹⁾ i numeri interi ε' , η' , ε'' , η'' debbono scegliersi in modo che le quattro coppie:

$$(0, 0) \quad , \quad (1 + \mu, 1 + m) \quad , \quad (\varepsilon'', \eta'') \quad , \quad (\varepsilon''', \eta''')$$

siano fra loro distinte (mod. 2).

3. Tenendo presente quanto si è detto in fine del precedente §, è facile riconoscere che le formole (IV) e (IV)' sono contenute nell'unico tipo più generale:

$$\begin{aligned} (-1)^{m\mu + \varepsilon + \eta} \mathfrak{P} \left[\begin{matrix} \gamma_1 + \varepsilon \\ g_1 + \eta \end{matrix} \right] (u + v) \cdot \mathfrak{P} \left[\begin{matrix} \gamma_2 + \varepsilon \\ g_2 + \eta \end{matrix} \right] (u - v) \times \\ \times \mathfrak{P} \left[\begin{matrix} \gamma_1 + \gamma_2 - \mu - \varepsilon \\ g_1 + g_2 - m - \eta \end{matrix} \right] (0) \cdot \mathfrak{P} \left[\begin{matrix} \mu - \varepsilon \\ m - \eta \end{matrix} \right] (0) = \\ = \pm (-1)^{\varepsilon'' + \eta''} \mathfrak{P} \left[\begin{matrix} \gamma_1 + \varepsilon'' \\ g_1 + \eta'' \end{matrix} \right] (v) \cdot \mathfrak{P} \left[\begin{matrix} \gamma_2 + \varepsilon'' \\ g_2 + \eta'' \end{matrix} \right] (-v) \times \\ \times \mathfrak{P} \left[\begin{matrix} \gamma_1 + \gamma_2 - \mu - \varepsilon'' \\ g_1 + g_2 - m - \eta'' \end{matrix} \right] (u) \cdot \mathfrak{P} \left[\begin{matrix} \mu - \varepsilon'' \\ m - \eta'' \end{matrix} \right] (u) - \\ - (-1)^{\varepsilon''' + \eta'''} \mathfrak{P} \left[\begin{matrix} \gamma_1 + \varepsilon''' \\ g_1 + \eta''' \end{matrix} \right] (v) \cdot \mathfrak{P} \left[\begin{matrix} \gamma_2 + \varepsilon''' \\ g_2 + \eta''' \end{matrix} \right] (-v) \times \\ \times \mathfrak{P} \left[\begin{matrix} \gamma_1 + \gamma_2 - \mu - \varepsilon''' \\ g_1 + g_2 - m - \eta''' \end{matrix} \right] (u) \cdot \mathfrak{P} \left[\begin{matrix} \mu - \varepsilon''' \\ m - \eta''' \end{matrix} \right] (u) \end{aligned}$$

⁽¹⁾ Il fatto che le formole (IV) e (IV)' sussistono non solamente per valori interi, ma anche per valori reali od immaginari qualsivogliano delle caratteristiche $\gamma_1, \gamma_2, g_1, g_2$, è già stato oggetto di poche parole da me dette, senza però entrare nelle relative dimostrazioni, nella sezione di Analisi del III Congresso internazionale dei matematici (Heidelberg, Agosto 1904).

dove i segni superiori corrispondono al caso di:

$$\varepsilon'' \equiv \varepsilon, \quad \eta'' \equiv \eta, \quad \varepsilon''' \equiv 1 - \mu, \quad \eta''' \equiv 1 - m \pmod{2}$$

e gli inferiori al caso in cui

$$(\varepsilon, \eta), \quad (1 - \mu, 1 - m), \quad (\varepsilon'', \eta''), \quad (\varepsilon''', \eta''')$$

sono quattro coppie di numeri interi fra loro distinte (mod. 2).

V.

1. Ritornando alla formola del § II:

$$\begin{aligned} & 2 \mathfrak{J} \left[\frac{\gamma_1 + \varepsilon'}{g_1 + \eta'} \right] (z_1) \cdot \mathfrak{J} \left[\frac{\gamma_2 + \varepsilon'}{g_2 + \eta'} \right] (z_2) \cdot \mathfrak{J} \left[\frac{\gamma_3 + \varepsilon'}{g_3 + \eta'} \right] (z_3) \cdot \mathfrak{J} \left[\frac{\gamma_4 + \varepsilon'}{g_4 + \eta'} \right] (z_4) = \\ &= \sum_{\varepsilon, \eta}^{0,1} (-1)^{(\varepsilon + \varepsilon')(\eta + \eta' + s)} \mathfrak{J} \left[\frac{\gamma_1 + \varepsilon}{g_1 + \eta} \right] (z'_1) \cdot \mathfrak{J} \left[\frac{\gamma_2 + \varepsilon}{g_2 + \eta} \right] (z'_2) \times \\ & \quad \times \mathfrak{J} \left[\frac{\gamma_3 + \varepsilon}{g_3 + \eta} \right] (z'_3) \cdot \mathfrak{J} \left[\frac{\gamma_4 + \varepsilon}{g_4 + \eta} \right] (z'_4) \end{aligned}$$

in cui le γ_ρ, g_ρ ($\rho = 1, 2, 3, 4$) sono assoggettate alle sole condizioni che

$$\sigma = \frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3 + \gamma_4), \quad s = \frac{1}{2}(g_1 + g_2 + g_3 + g_4)$$

siano numeri interi ed ε', η' sono due interi affatto arbitrarii, poniamo:

$$z_1 = v + t, \quad z_2 = v - t, \quad z_3 = -w - u, \quad z_4 = w - u$$

cosicchè:

$$z'_1 = u + t, \quad z'_2 = u - t, \quad z'_3 = -w - v, \quad z'_4 = w - v.$$

Otteniamo:

$$\begin{aligned} & 2 \mathfrak{J} \left[\frac{\gamma_1 + \varepsilon'}{g_1 + \eta'} \right] (v + t) \cdot \mathfrak{J} \left[\frac{\gamma_2 + \varepsilon'}{g_2 + \eta'} \right] (v - t) \times \\ & \quad \times \mathfrak{J} \left[\frac{\gamma_3 + \varepsilon'}{g_3 + \eta'} \right] (-w - u) \cdot \mathfrak{J} \left[\frac{\gamma_4 + \varepsilon'}{g_4 + \eta'} \right] (w - u) = \\ (1) \quad &= \sum_{\varepsilon, \eta}^{0,1} (-1)^{(\varepsilon + \varepsilon')(\eta + \eta' + s)} \mathfrak{J} \left[\frac{\gamma_1 + \varepsilon}{g_1 + \eta} \right] (u + t) \cdot \mathfrak{J} \left[\frac{\gamma_2 + \varepsilon}{g_2 + \eta} \right] (u - t) \times \\ & \quad \times \mathfrak{J} \left[\frac{\gamma_3 + \varepsilon}{g_3 + \eta} \right] (-w - v) \cdot \mathfrak{J} \left[\frac{\gamma_4 + \varepsilon}{g_4 + \eta} \right] (w - v). \end{aligned}$$

Se poniamo invece:

$$z_1 = w + t, \quad z_2 = w - t, \quad z_3 = -v - u, \quad z_4 = v - u,$$

cosicchè:

$$z'_1 = u + t, \quad z'_2 = u - t, \quad z'_3 = -w - v, \quad z'_4 = v - w,$$

otteniamo, essendo ε'' ed η'' due interi arbitrarii:

$$\begin{aligned}
 & 2 \mathfrak{J} \left[\begin{matrix} \gamma_1 + \varepsilon'' \\ g_1 + \eta'' \end{matrix} \right] (w+t) \cdot \mathfrak{J} \left[\begin{matrix} \gamma_2 + \varepsilon'' \\ g_2 + \eta'' \end{matrix} \right] (w-t) \times \\
 & \times \mathfrak{J} \left[\begin{matrix} \gamma_3 + \varepsilon'' \\ g_3 + \eta'' \end{matrix} \right] (-v-u) \cdot \mathfrak{J} \left[\begin{matrix} \gamma_4 + \varepsilon'' \\ g_4 + \eta'' \end{matrix} \right] (v-u) = \\
 (2) \quad & = \sum_{\varepsilon, \eta}^{0,1} (-1)^{(\varepsilon + \varepsilon'')(\eta + \eta'' + s)} \mathfrak{J} \left[\begin{matrix} \gamma_1 + \varepsilon \\ g_1 + \eta \end{matrix} \right] (u+t) \cdot \mathfrak{J} \left[\begin{matrix} \gamma_2 + \varepsilon \\ g_2 + \eta \end{matrix} \right] (u-t) \times \\
 & \times \mathfrak{J} \left[\begin{matrix} \gamma_3 + \varepsilon \\ g_3 + \eta \end{matrix} \right] (-w-v) \cdot \mathfrak{J} \left[\begin{matrix} \gamma_4 + \varepsilon \\ g_4 + \eta \end{matrix} \right] (v-w).
 \end{aligned}$$

2. Incominciamo con prendere nelle (1) e (2):

$$\varepsilon' = \varepsilon'' \quad , \quad \eta' = \eta'' \quad , \quad \gamma_4 = 0 \quad , \quad g_4 = 0.$$

Poichè allora:

$$\mathfrak{J} \left[\begin{matrix} \gamma_4 + \varepsilon \\ g_4 + \eta \end{matrix} \right] (v-w) = \mathfrak{J} \left[\begin{matrix} -\varepsilon \\ -\eta \end{matrix} \right] (w-v) = (-1)^{\varepsilon\eta} \mathfrak{J} \left[\begin{matrix} \varepsilon \\ \eta \end{matrix} \right] (w-v),$$

si avrà, sottraendo la (2) membro a membro dalla (1) e scrivendo poi ε, η in luogo di ε', η' , la relazione:

$$\begin{aligned}
 & \mathfrak{J} \left[\begin{matrix} \gamma_1 + \varepsilon \\ g_1 + \eta \end{matrix} \right] (v+t) \cdot \mathfrak{J} \left[\begin{matrix} \gamma_2 + \varepsilon \\ g_2 + \eta \end{matrix} \right] (v-t) \times \\
 & \times \mathfrak{J} \left[\begin{matrix} \gamma_3 + \varepsilon \\ g_3 + \eta \end{matrix} \right] (-w-u) \cdot \mathfrak{J} \left[\begin{matrix} \varepsilon \\ \eta \end{matrix} \right] (w-u) - \\
 & - \mathfrak{J} \left[\begin{matrix} \gamma_1 + \varepsilon \\ g_1 + \eta \end{matrix} \right] (w+t) \cdot \mathfrak{J} \left[\begin{matrix} \gamma_2 + \varepsilon \\ g_2 + \eta \end{matrix} \right] (w-t) \times \\
 (V) \quad & \times \mathfrak{J} \left[\begin{matrix} \gamma_3 + \varepsilon \\ g_3 + \eta \end{matrix} \right] (-v-u) \cdot \mathfrak{J} \left[\begin{matrix} \varepsilon \\ \eta \end{matrix} \right] (v-u) = \\
 & = (-1)^{(1+\varepsilon)(1+\eta+s)} \mathfrak{J} \left[\begin{matrix} \gamma_1 + 1 \\ g_1 + 1 \end{matrix} \right] (u+t) \cdot \mathfrak{J} \left[\begin{matrix} \gamma_2 + 1 \\ g_2 + 1 \end{matrix} \right] (u-t) \times \\
 & \times \mathfrak{J} \left[\begin{matrix} \gamma_3 + 1 \\ g_3 + 1 \end{matrix} \right] (-w-v) \cdot \mathfrak{J} \left[\begin{matrix} 1 \\ 1 \end{matrix} \right] (w-v).
 \end{aligned}$$

In questa relazione ε ed η sono due interi qualsivogliano. I numeri $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, g_1, g_2, g_3$ sono poi assoggettati alle sole condizioni che:

$$\sigma = \frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3) \quad \text{ed} \quad s = \frac{1}{2}(g_1 + g_2 + g_3)$$

siano interi.

3. Supposto in secondo luogo nelle (1) e (2) la coppia (ε', η') distinta (mod. 2) dalla coppia (ε'', η'') e ponendo ancora come sopra $\gamma_4 = g_4 = 0$,

si deduce sommando o sottraendo membro a membro:

$$\begin{aligned}
 & 2 \mathfrak{J} \left[\begin{smallmatrix} \gamma_1 + \varepsilon' \\ g_1 + \eta' \end{smallmatrix} \right] (v+t) \cdot \mathfrak{J} \left[\begin{smallmatrix} \gamma_2 + \varepsilon' \\ g_2 + \eta' \end{smallmatrix} \right] (v-t) \times \\
 & \times \mathfrak{J} \left[\begin{smallmatrix} \gamma_3 + \varepsilon' \\ g_3 + \eta' \end{smallmatrix} \right] (-w-u) \cdot \mathfrak{J} \left[\begin{smallmatrix} \varepsilon' \\ \eta' \end{smallmatrix} \right] (w-u) = \\
 (3) \quad & \pm 2 \mathfrak{J} \left[\begin{smallmatrix} \gamma_1 + \varepsilon'' \\ g_1 + \eta'' \end{smallmatrix} \right] (w+t) \cdot \mathfrak{J} \left[\begin{smallmatrix} \gamma_2 + \varepsilon'' \\ g_2 + \eta'' \end{smallmatrix} \right] (w-t) \times \\
 & \times \mathfrak{J} \left[\begin{smallmatrix} \gamma_3 + \varepsilon'' \\ g_3 + \eta'' \end{smallmatrix} \right] (-v-u) \cdot \mathfrak{J} \left[\begin{smallmatrix} \varepsilon'' \\ \eta'' \end{smallmatrix} \right] (v-u) = \\
 & = \sum_{\varepsilon, \eta}^{0,1} A_{\varepsilon, \eta} \mathfrak{J} \left[\begin{smallmatrix} \gamma_1 + \varepsilon \\ g_1 + \eta \end{smallmatrix} \right] (u+t) \cdot \mathfrak{J} \left[\begin{smallmatrix} \gamma_2 + \varepsilon \\ g_2 + \eta \end{smallmatrix} \right] (u-t) \times \\
 & \times \mathfrak{J} \left[\begin{smallmatrix} \gamma_3 + \varepsilon \\ g_3 + \eta \end{smallmatrix} \right] (-w-v) \cdot \mathfrak{J} \left[\begin{smallmatrix} \varepsilon \\ \eta \end{smallmatrix} \right] (w-v)
 \end{aligned}$$

dove si è posto per brevità:

$$A_{\varepsilon, \eta} = (-1)^{(\varepsilon+\varepsilon')(\eta+\eta'+s)} \pm (-1)^{(\varepsilon+\varepsilon'')(\eta+\eta''+s)+\varepsilon\eta}.$$

Si può anche scrivere, come è facile di riconoscere:

$$(4) \quad A_{\varepsilon, \eta} = (-1)^{(\varepsilon+\varepsilon')(\eta+\eta'+s)} \{ 1 \pm (-1)^{\varepsilon\eta'+\eta\varepsilon'+\varepsilon\eta''+\eta\varepsilon''+\varepsilon\eta} (-1)^{s(\varepsilon'+\varepsilon'')+\varepsilon'\eta'+\varepsilon''\eta''} \}.$$

Imponiamo ora alle coppie (ε', η') ed (ε'', η'') le condizioni:

$$\varepsilon' \eta' \equiv 0 \quad , \quad \varepsilon'' \eta'' \equiv 0 \quad (\text{mod. } 2);$$

e sia $(\varepsilon''', \eta''')$ la terza coppia di numeri interi, perfettamente determinata (mod. 2), che è distinta dalle (ε', η') ed (ε'', η'') e soddisfa del pari alla condizione:

$$\varepsilon''' \eta''' \equiv 0 \quad (\text{mod. } 2).$$

Nella sommatoria che figura nel secondo membro di (3), la coppia (ε, η) dovrà percorrere i quattro sistemi:

$$(1, 1) \quad , \quad (\varepsilon', \eta') \quad , \quad (\varepsilon'', \eta'') \quad , \quad (\varepsilon''', \eta''').$$

Per i primi tre sistemi l'esponente che si presenta in (4):

$$\varepsilon\eta' + \eta\varepsilon' + \varepsilon\eta'' + \eta\varepsilon'' + \varepsilon\eta$$

prende rispettivamente i valori (mod. 2):

$$\varepsilon' + \eta' + \varepsilon'' + \eta'' + 1 \quad , \quad \varepsilon'\eta'' + \eta'\varepsilon'' \quad , \quad \varepsilon'\eta'' + \eta'\varepsilon''$$

i quali, come è facile riconoscere, sono congrui fra loro (mod. 2), e per il quarto sistema $(\varepsilon''', \eta''')$ prende il valore (mod. 2):

$$\varepsilon''' \eta' + \eta''' \varepsilon' + \varepsilon''' \eta'' + \eta''' \varepsilon'' \equiv \varepsilon' + \eta' + \varepsilon'' + \eta'' \quad (\text{mod. } 2).$$

Se dunque nella formola (3) noi scegliamo il segno $\pm$ secondochè

$$(-1)^{\varepsilon' + \varepsilon'' + \eta' + \eta'' + s(\varepsilon' + \varepsilon'')}$$

sia uguale a $+1$ ovvero a -1 , otteniamo:

$$A_{1,1} = A_{\varepsilon', \eta'} = A_{\varepsilon'', \eta''} = 0$$

$$A_{\varepsilon''', \eta'''} = 2(-1)^{(\varepsilon''' + \varepsilon')(\eta''' + \eta' + s)} = -2(-1)^{\varepsilon' + \eta' + \varepsilon''' + \eta''' + s(\varepsilon' + \varepsilon''')}$$

cosicchè dalla (3) moltiplicata per

$$(-1)^{\varepsilon' + \eta' + s\varepsilon'}$$

tenendo presente che

$$\vartheta \left[\begin{smallmatrix} \varepsilon'' \\ \eta'' \end{smallmatrix} \right] (v - u) = (-1)^{\varepsilon'' \eta''} \vartheta \left[\begin{smallmatrix} \varepsilon'' \\ \eta'' \end{smallmatrix} \right] (u - v) = \vartheta \left[\begin{smallmatrix} \varepsilon'' \\ \eta'' \end{smallmatrix} \right] (u - v), \text{ ecc.,}$$

si ha la relazione:

$$\begin{aligned} 0 &= (-1)^{\varepsilon' + \eta' + s\varepsilon'} \vartheta \left[\begin{smallmatrix} \gamma_1 + \varepsilon' \\ g_1 + \eta' \end{smallmatrix} \right] (v + t) \cdot \vartheta \left[\begin{smallmatrix} \gamma_2 + \varepsilon' \\ g_2 + \eta' \end{smallmatrix} \right] (v - t) \times \\ &\quad \times \vartheta \left[\begin{smallmatrix} \gamma_3 + \varepsilon' \\ g_3 + \eta' \end{smallmatrix} \right] (-w - u) \cdot \vartheta \left[\begin{smallmatrix} \varepsilon' \\ \eta' \end{smallmatrix} \right] (w - u) + \\ (V)' \quad &+ (-1)^{\varepsilon'' + \eta'' + s\varepsilon''} \vartheta \left[\begin{smallmatrix} \gamma_1 + \varepsilon'' \\ g_1 + \eta'' \end{smallmatrix} \right] (w + t) \cdot \vartheta \left[\begin{smallmatrix} \gamma_2 + \varepsilon'' \\ g_2 + \eta'' \end{smallmatrix} \right] (w - t) \times \\ &\quad \times \vartheta \left[\begin{smallmatrix} \gamma_3 + \varepsilon'' \\ g_3 + \eta'' \end{smallmatrix} \right] (-v - u) \cdot \vartheta \left[\begin{smallmatrix} \varepsilon'' \\ \eta'' \end{smallmatrix} \right] (u - v) + \\ &+ (-1)^{\varepsilon''' + \eta''' + s\varepsilon'''} \vartheta \left[\begin{smallmatrix} \gamma_1 + \varepsilon''' \\ g_1 + \eta''' \end{smallmatrix} \right] (u + t) \cdot \vartheta \left[\begin{smallmatrix} \gamma_2 + \varepsilon''' \\ g_2 + \eta''' \end{smallmatrix} \right] (u - t) \times \\ &\quad \times \vartheta \left[\begin{smallmatrix} \gamma_3 + \varepsilon''' \\ g_3 + \eta''' \end{smallmatrix} \right] (-w - v) \cdot \vartheta \left[\begin{smallmatrix} \varepsilon''' \\ \eta''' \end{smallmatrix} \right] (v - w). \end{aligned}$$

In questa formola le $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, g_1, g_2, g_3$ devono essere tali che le semi-somme:

$$\sigma = \frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma_3), \quad s = \frac{1}{2}(g_1 + g_2 + g_3)$$

siano numeri interi ⁽¹⁾; nel mentre che le tre coppie di numeri interi

(1) Nel caso particolare in cui si ritengano dover essere intere le stesse $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, g_1, g_2, g_3$, le formole (V) e (V') equivalgono al sistema delle relazioni date dal sig. Study nella sua monografia: *Sphärische Trigonometrie, orthogonale Substitutionen und elliptische Functionen* (Abhandl. der k. Sächsischen Ges. der Wiss. Band XX, 1893, pag. 195). Cfr. anche Krazer, *Lehrbuch der Thetafunctionen* (Leipzig, Teubner 1903), pagg. 323-325.

(ε', η') , (ε'', η'') , $(\varepsilon''', \eta''')$ devono essere distinte fra loro (mod. 2) e soddisfare alle condizioni:

$$\varepsilon'\eta' \equiv \varepsilon''\eta'' \equiv \varepsilon'''\eta''' \pmod{2}.$$

Si vede pertanto che la (V)' equivale sostanzialmente alla relazione:

$$\begin{aligned} & \mathfrak{P}_{\gamma_1, g_1}(v+t) \cdot \mathfrak{P}_{\gamma_2, g_2}(v-t) \cdot \mathfrak{P}_{\gamma_3, g_3}(-w-u) \cdot \mathfrak{P}_{00}(w-u) = \\ & = \mathfrak{P}_{\gamma_1, g_1+1}(w+t) \cdot \mathfrak{P}_{\gamma_2, g_2+1}(w-t) \cdot \mathfrak{P}_{\gamma_3, g_3+1}(-v-u) \cdot \mathfrak{P}_{01}(u-v) + \\ & + (-1)^s \mathfrak{P}_{\gamma_1+1, g_1}(u+t) \cdot \mathfrak{P}_{\gamma_2+1, g_2}(u-t) \cdot \mathfrak{P}_{\gamma_3+1, g_3}(-v-u) \cdot \mathfrak{P}_{10}(v-w). \end{aligned}$$

Patologia — *Uno sguardo alle nostre ricerche sul gozzo e sul cretinismo endemici.* Quinta Nota preliminare del Socio B. GRASSI e di L. MUNARON.

Notoriamente il gozzo e il cretinismo endemici formanti un'unica entità morbosa, che si può denominare brevemente tiroidismo endemico, erano stati collocati in un medesimo gruppo colla malaria e supposti come questa originati da miasmi.

Dopo le nuove scoperte sulla malaria, noi credemmo opportuno di affrontare l'argomento del tiroidismo endemico, tanto più che Grasset aveva descritto dei parassiti simili a quelli della malaria, da lui riscontrati nel sangue di soggetti colpiti da gozzo endemico.

Le nostre ricerche, fatte in quest'ultimo triennio, ci permettono di riassumere nei termini seguenti lo stato attuale della questione.

* * *

Abbiamo intrapreso una prima serie di ricerche dirette a dimostrare se sussistesse anche per il gozzo endemico una contagiosità diretta, ovvero indiretta, vale a dire paragonabile a quella della malaria.

Dopo molte e svariate prove noi siamo arrivati a queste conclusioni:

1.° Il gozzo, ancorchè di recente sviluppato, non si può coll'innesto riprodurre in altri animali della stessa specie; nè si può propagare coll'innesto dell'ipofisi o del sangue, e neppure somministrando opportunamente per bocca contenuto intestinale degli animali infetti.

Queste nostre ricerche fatte sui cani, vengono confermate da esperienze di innesti tiroidei intrapresi per altri scopi sull'uomo da Cristiani.

Tutti insieme i fatti or detti tendono ad escludere la supposta analogia tra la malaria e il gozzo.

2.° Un animale infettatosi anche di recente, chiuso in ambiente dove il gozzo non sia endemico, con animali indenni, non li contagia. Le osserva-

zioni cliniche di Combe a tutta prima sembrano contrarie a questi sperimenti, ma noi crediamo che esse possano interpretarsi in modo differente da quello sostenuto dal medico svizzero.

3.° Il gozzo si sviluppa anche con una temperatura aggirantesi attorno a 0°, quale è quella delle case non riscaldate sulle alte Alpi, nel cuore dell'inverno.

4.° La possibilità dell'intervento di ospiti intermedi, in ogni caso si limiterebbe alle pulci e ai pidocchi. Che questi possano trasmettere il gozzo, ci sembra escluso dai nostri esperimenti.

5.° Noi non abbiamo riscontrato i parassiti di Grasset, che, data la grande facilità dell'esame, non dovevano sfuggirci.

6.° Anche sotto altri aspetti il gozzo non si comporta come una malattia infettiva. Se si porta un cane col gozzo evidentemente in progresso di sviluppo, in un luogo dove la malattia non è endemica, prontamente il gozzo diminuisce e, se era non di antica data o non molto sviluppato, finisce quasi per scomparire. Fatti simili erano già noti per l'uomo; si conoscono infatti casi nei quali in uno stesso individuo si osserva uno spiccato impiccolimento del gozzo, per effetto del soggiorno in luogo sano, e un nuovo incremento col ritorno nella zona di endemia.

Questi fatti verificabili con matematica esattezza, non si possono confondere colle oscillazioni della grandezza della tiroide, che normalmente possono occorrere in località dove il gozzo è endemico.

Il gozzo si sviluppa soltanto dopo un soggiorno più o meno prolungato nella località gozzigena e, perdurando il soggiorno, di regola subisce un accrescimento lento, ma continuo.

7.° Il gozzo è una malattia ereditaria anche per gli animali, analogamente a quanto si sapeva per l'uomo.

Noi abbiamo avuto notizia di casi, in cui l'ereditarietà si doveva ritenere avvenuta in luogo dove il gozzo non è endemico, e soltanto per parte del padre; almeno nello stato attuale delle nostre cognizioni, noi non possiamo interpretare diversamente i dati da noi raccolti, per quanto criticamente vagliati.

I fatti riferiti sotto i numeri da 1 a 6 ci convincono che il tiroidismo endemico non può aver posto tra le malattie infettive, e tanto meno tra quelle contagiose. Il fatto n. 7, non implica di necessità una contraddizione con questa induzione.

Concludendo dunque, escludiamo che il gozzo e il cretinismo endemici siano malattie infettive e contagiose, e, cioè, derivanti da parassiti. *Tutti i fatti finora riferiti sembrano invece spiegabili, ammettendo che il gozzo sia l'effetto di avvelenamento lento, prodotto dall'ambiente esterno.*

*
* *

Il concetto che il gozzo sia trasmesso dall'acqua è molto più radicato che non fosse un tempo quello della trasmissione delle febbri intermittenti per mezzo della mala acqua.

Tutti citano sorgenti che producono il gozzo e le distinguono da altre che non lo producono; si ricordano anche molti fatti che sembrano dimostrare che veramente l'acqua sia un veicolo della malattia in discorso.

Noi abbiamo fatto un'altra serie di esperimenti, i quali mentre da un lato corroborano sempre più il nostro concetto che il gozzo non è una malattia parassitaria, dall'altro lato dimostrano come le acque le più temute siano inefficaci a produrre il gozzo in luoghi dove questo non è certamente endemico. Gli esperimenti prolungati per oltre un anno su molti animali, certamente predisposti al gozzo, ci diedero infatti risultato costantemente negativo.

Altre due serie di esperimenti vennero da noi fatte in luoghi di endemia. Colla prima serie in tre differenti gruppi di animali si ebbe la produzione del gozzo, in un tempo relativamente breve non ostante che l'acqua si somministrasse esclusivamente bollita e i cibi fossero sempre cotti.

Colla seconda serie abbiamo ottenuto lo sviluppo del gozzo ad onta che si somministrasse ai cani acqua e cibi provenienti non più dal luogo dove si faceva l'esperimento, ma da luogo immune. A buon conto si faceva ancora bollire l'acqua e cuocere i cibi.

Senza voler negare che l'acqua possa in determinate condizioni diventare mezzo di propagazione del gozzo, noi dobbiamo però in ogni caso ad essa concedere un'importanza di gran lunga minore a quella finora ammessa.

Gli esperimenti di Carle e Lustig, a tutta prima in contraddizione coi nostri, vengono da noi spiegati colla circostanza che a Torino l'endemia, almeno negli animali, vige in una certa misura.

*
* *

Dopo i primi esperimenti, ci parve di poter ragionevolmente supporre, che la malattia fosse originata da veleni prodotti da microbi viventi nel terreno e nelle immondizie. Il fatto che dovunque c'è gozzo, ivi non mancano mai terreni umidi, ci confortava in questa nostra ipotesi, non sembrandoci che essa venisse infirmata dal trovare terreni umidi senza endemia di gozzo.

Questa supposizione ci condusse a due serie di esperimenti. Noi cerchiamo, cioè, di produrre il gozzo in luoghi sani, per mezzo di fango, paglia, immondizie, patate fracide, fette di patate esposte per parecchi giorni nell'ambiente gozzigeno, gelatine ugualmente esposte, ecc. Questi esperimenti vennero fatti a Rovellasca (provincia di Como) e a Roma — due luoghi che dobbiamo ritenere immuni. — A Rovellasca i risultati furono costantemente negativi; a Roma molti esperimenti diedero risultato negativo; però special-

mente in due cani, abbiamo potuto ottenere un ingrandimento della tiroide, non molto rilevante, ma bene evidente; purtroppo il primo cane morì di altra malattia e nel secondo, dopo qualche mese, il fenomeno scomparve.

A noi sembra proprio di dover ammettere che in questi due casi siasi ottenuto lo sviluppo della malattia, ci sembra anzi che nel primo caso lo sviluppo abbia avuto speciale rapporto col fatto, che si erano messi nell'ambiente dove stavano gli animali, immondizie provenienti dalle case di Cogne, e nel secondo caso, colla circostanza, che si erano aggiunte al materiale solito, patate, come sopra si è detto.

Riflettendo su tutte le circostanze, ci siamo fatta l'opinione che i risultati positivi ottenuti a Roma dovessero collegarsi col fatto che a Roma gli animali vivevano in ambiente chiuso, mentre a Rovellasca stavano in ambiente aperto.

Tentammo perciò di metterci anche a Rovellasca nelle stesse condizioni di Roma, ma l'esperimento non si è potuto continuare a sufficienza.

L'altra serie di esperimenti consistette nel tenere i cani in gabbie di ferro sollevate dal suolo, evitando, cioè, il contatto col terreno. Fu appunto in questa serie di esperimenti che si usarono l'acqua e i cibi provenienti da luoghi immuni, come sopra si è detto.

Non ostante che si evitasse con grande cautela il contatto col suolo, il gozzo si produsse negli animali in esperimento; sembrerebbe dunque in questo caso che fosse stata l'aria il veicolo della malattia. Ammettendo che fosse l'aria, dovremmo cercarne la causa nei materiali in essa sospesi.

Certamente una tale conclusione presta il fianco alla critica e noi stessi ci proponiamo, se non ci faranno difetto i mezzi, di ripetere l'esperimento, disinfettando molto più di quanto si sia fatto nel precedente esperimento, sì gli animali, che la gabbia. Si rifletta però che gli esperimenti precedenti, che escludono trattarsi di una malattia parassitaria, danno molto minore importanza di quanto parrebbe a tutta prima, alla incompleta antisepsi; e difatti, evidentemente, l'ambiente che produce il gozzo, non esplica la propria azione che lentamente, a grado a grado e cumulativamente, sommandosene in progresso di tempo gli effetti.

A questo proposito noi dobbiamo aggiungere che da ripetuti esperimenti fatti a noi risulta che tale azione riesce di gran lunga meno intensa nei suoi effetti sui cani viventi in libertà.

*
* *

Arrivati a questo punto noi abbiamo creduto necessario di riprendere in minuto esame la letteratura della questione, per vedere se veramente non ci fosse nulla di usufruibile nella vecchia ipotesi dello iodio.

Tutti sanno che da molto tempo si è osservato che lo iodio ha un'influenza curativa sul gozzo. Fu Chatin che nel sesto decennio del secolo

scorso partendo da questa osservazione intraprendeva estese ricerche comparative sull'acqua, sull'aria, sui cibi, ecc., tanto in luoghi di endemia, quanto in luoghi indenni, venendo alla conclusione che lo sviluppo del gozzo fosse subordinato alla diminuzione o mancanza di iodio.

La dottrina di Chatin è stata però oppugnata per il fatto che sonvi località dove lo iodio manca, e non vi è gozzo; e altre dove lo iodio abbonda e il gozzo si presenta frequente.

Perfino l'eco della nuova dottrina sembrava perciò spento, quando Baumann inaspettatamente le infondeva nuova vita, scoprendo che nella tiroide vi è una sostanza specifica da lui detta iodotirina, per l'abbondanza di iodio in essa contenuto, sostanza mancante o deficiente nella tiroide ingrossata per effetto del gozzo.

Si veniva così, per un'altra via, a confermare quanto aveva sostenuto Chatin.

Gli studi sull'argomento presto si moltiplicarono e si arrivò alle seguenti conclusioni:

1. Vi sono dei gozzi in cui veramente lo iodio è scarsissimo.

2. Ve ne sono però altri, nei quali la *quantità di iodio assoluta è maggiore di quella contenuta in una tiroide normale*; essa può diventare anche molto maggiore, somministrando iodio al paziente.

3. Viceversa però la *quantità relativa di iodio, vale a dire lo iodio contenuto in egual quantità di peso di tiroide normale e di tiroide gozzuta, è minore in questa che in quella*.

4. La iodotirina risiede nella sostanza colloide. In questa Oswald distingue due corpi proteici: un nucleoproteide e la tireoglobulina; nel gozzo colloide è relativamente più abbondante la tireoglobulina: questa può essere iodata o no: quanto più grosso è il gozzo, tanto minore è la quantità relativa di tireoglobulina iodata.

Era sembrato che il secondo dei quattro fatti ora citati da solo definitivamente gettasse un'altra volta nella polvere la dottrina di Chatin, senonchè d'un tratto siamo stati ricondotti alla domanda se non si dovesse invece rimettere sull'altare.

Prima di rispondere a questa domanda, crediamo opportuno accennare alle ricerche di Cyon, il quale, battendo una via sua propria e precisamente partendo dalle sue vedute fisiologiche sulla funzione della tiroide, credette di poter sostenere che il gozzo si possa produrre sia per difetto, sia per eccesso di iodio, data una causa specifica che egli ammette esistente nell'acqua. Precisando, secondo Cyon, quando nell'acqua vi siano troppi sali iodici, il tiroidismo può svilupparsi per avvelenamento iodico, verificantesi per la incapacità da parte della tiroide di trasformare e così neutralizzare tanta quantità di sali iodici in iodotirina (in questi casi l'iperplasia della tiroide sarebbe benefica).

Quando lo iodio nell'acqua è manchevole, non potendosi produrre iodotirina in quantità sufficiente, la tiroide verrebbe messa fuori di funzione, donde accumulo di quei materiali di disassimilazione, che normalmente cooperano nella produzione della iodotirina. Con ciò Cyon non intende di asserire che l'acqua potrebbe produrre il gozzo direttamente per mancanza o eccesso di iodio: egli suppone che in essa sianvi materie, verosimilmente inorganiche, che impediscano la trasformazione dello iodio in iodotirina. Tutto sommato, egli crede che ci potremmo rendere ragione anche dei fatti che sembravano in contradizione colla dottrina di Chatin.

Dobbiamo anche aggiungere che Oswald, ritornando sulla questione, notò come l'iperplasia che avviene nella ghiandola tiroide (moltiplicazione delle cellule glandulari) non si potrebbe spiegare senza l'intervento di un agente specifico, il quale costituirebbe la causa prima del gozzo.

A noi sembra però che, anche tenuto calcolo dei dati di Cyon e di Oswald, si possa ritornare alla dottrina di Chatin senza invocare quell'agente specifico che Oswald crede indispensabile e del quale invece i nostri esperimenti ci obbligano a disfarci. Richiamiamo a questo riguardo l'attenzione sulle interessantissime ricerche di Gautier e di Bourcet sullo iodio. Specialmente il primo ha dimostrato che bisogna distinguere bene tre stati nei quali si può trovare lo iodio, cioè in condizione inorganica, in condizione organica (sciolto) e in condizione organizzata (insolubile, fissato dagli esseri vivi).

Nell'atmosfera Gautier trova soltanto polveri iodate, e precisamente iodio organizzato, ossia « principî iodati complessi, forse contenuti in alghe, licheni, muschi, schizofiti o spore in sospensione ». Poichè questi sono tra i materiali più leggieri sospesi nell'atmosfera, egli rinviene la maggior quantità di iodio nelle polveri raccolte a una certa altezza dal suolo.

Considerando il problema da tutti i lati, a noi sembra che la distinzione di Gautier tra iodio inorganico e iodio organico abbia un valore non inferiore a quella fatta da uno di noi, a proposito della malaria, tra gli anofeli e le altre zanzare.

A noi sembra che la questione del gozzo e del cretinismo endemici si trovi in un momento poco differente da quello nel quale era il problema malarico nel 1898. Tutti ammettevano che le zanzare avevano a che fare con la malaria, nonostante che la distribuzione delle zanzare non coincidesse con quella della malaria, mancanza di coincidenza, per effetto della quale la teoria delle zanzare malarifere, era stata un tempo messa in disparte, precisamente come accadde alla teoria di Chatin.

È impossibile formulare una teoria precisa sullo iodio, considerato come causa di gozzo, nello stato attuale delle nostre cognizioni, come, nello stato della scienza fino al 1898, era impossibile prevedere come agissero le zanzare malarifere; in quella stessa maniera però che allora è stato utile di presentare, come direbbero i tedeschi, un'ipotesi di lavoro, del pari oggi noi

riteniamo che sia opportuno il farlo per l'argomento del gozzo, e del cretinismo endemico. Noi ci limitiamo al gozzo perchè siamo persuasi che nessuna ipotesi sull'origine di questo può pretendere un certo grado di verosimiglianza se nel medesimo tempo non offre anche la spiegazione del cretinismo.

A noi sembra che l'attenzione debba specialmente fissarsi sullo iodio contenuto nell'atmosfera. È vero che la quantità di esso è minima, ma, nello stato attuale delle nostre cognizioni, non è inammissibile che anche una quantità minima eserciti una grande influenza.

A questo riguardo richiamiamo anche la famosa discussione avvenuta in seno all'Accademia di medicina di Parigi, nel sesto decennio del secolo scorso, a proposito di quanto sosteneva Rilliet, che, cioè, minime quantità di iodio possono produrre effetti inaspettati.

L'acqua, il terreno, i cibi potranno forse influire nella produzione del gozzo a seconda del loro contenuto in iodio; non sembra però che il movente fondamentale del fenomeno, di cui cerchiamo la spiegazione, debba risiedere in essi.

Noi supponiamo che nei luoghi dove esiste l'endemia di gozzo, manchi o sia deficiente la polvere iodata atmosferica (iodio organizzato) e che tale deficienza non venga riparata dai cibi o dall'acqua. Il perchè della supposta deficienza dovrebbe forse ricercarsi o in speciali organismi, che moltiplicandosi enormemente consumano la provvista ordinaria dell'atmosfera, o nel complesso della fauna e della flora, che viene a produrre lo stesso effetto.

Data questa deficienza di iodio, la tiroide cercherebbe ripararvi con uno di quei fenomeni che noi conosciamo molto bene, cioè con un adattamento funzionale; da ciò l'iperplasia dapprima e l'aumento consecutivo di sostanza colloide.

Se partiamo dalla supposizione che la quantità di iodio usufruibile per la produzione della iodotirina sia diminuita, si può ammettere che la tiroide coll'ingrandirsi pervenga per così dire a estrarre la stessa quantità di iodio di prima, usufruendo, s'intende, maggior quantità di materiale per la estrazione.

Per servirsi di un confronto, avverrebbe nella tiroide, come in un opificio, dove un certo numero di operai lavorassero per estrarre dal materiale opportuno una determinata quantità di iodio. Se il materiale contenesse relativamente una minor quantità di iodio per diminuire la produzione, occorrerebbe impiegare un maggior numero di operai, dovendosi per l'estrazione usufruire maggior quantità del materiale in discorso. Si verrebbe così a guadagnare in estensione quello che si era perduto in intensità.

Considerato da questo punto di vista, il gozzo endemico viene ad essere fino ad un certo momento, non più una malattia vera e propria, ma un fenomeno di compensazione, come se ne conoscono molti altri. Che questa com-

pensazione riesca imperfetta, non ci deve far meraviglia, quando si rifletta ciò che succede per gli altri organi.

Rimangono da spiegare la ereditarietà del gozzo e il cretinismo. Se si ammettesse la ereditarietà delle proprietà acquisite, la spiegazione si troverebbe facilmente. D'altra parte bisogna confessare che l'argomento della ereditarietà riguardo al gozzo è al cretinismo è troppo poco studiato; il fatto però che quando una madre di parecchi cretini passa in un luogo immune, non ha più figli cretini, condurrebbe a credere che la stessa causa che agisce sulla tiroide della madre agisca anche sulla tiroide del feto, ma di questo argomento si occupa più specialmente uno di noi (Munaron) in una Nota che viene presentata contemporaneamente alla presente.

Riunendo insieme quanto abbiamo fin qui detto, ci sembra di poter concludere che nello stato attuale delle nostre conoscenze la causa diretta del gozzo deve cercarsi nella quantità di iodio contenuto nell'ambiente e più particolarmente nella polvere atmosferica, e che questa causa diretta deve alla sua volta rapportarsi agli organismi conviventi nello stesso ambiente, in cui stanno gli animali nei quali si manifesta il gozzo endemico.

La questione, messa in questi termini, offre certamente un grandissimo interesse scientifico e noi speriamo di poter ottenere i pochi mezzi necessari per svolgerla ulteriormente.

Matematica. — *Sui gruppi di movimenti.* Nota del dott. EUGENIO ELIA LEVI, presentata dal Socio LUIGI BIANCHI.

1. Il gruppo dei movimenti di uno spazio euclideo ad n dimensioni è un gruppo ad $\frac{n(n+1)}{2}$ parametri che ha per operazioni infinitesime generatrici le traslazioni

$$T_1 = p_1, T_2 = p_2, \dots, T_n = p_n$$

e le rotazioni

$$R_{ik} = x_i p_k - x_k p_i \quad (i, k = 1, \dots, n).$$

Si avrà $R_{ik} = -R_{ki}$. Le formule che danno la composizione del gruppo sono

$$(T_i T_k) = 0 \quad (R_{ik} T_l) = 0 \quad (R_{ik} T_i) = -T_k \quad (R_{ik} R_{lm}) = 0 \quad (R_{ik} R_{il}) = -R_{kl} \\ (i, k, l, m \text{ essendo indici diversi}).$$

Chiameremo traslazione una combinazione lineare di traslazioni, rotazione una combinazione lineare di rotazioni. Con un conveniente movimento reale

si può portare ⁽¹⁾ la più generale operazione infinitesima del gruppo nella forma

$$(1) \quad Xf = h_1 R_{12} + h_2 R_{34} + \dots + h_r R_{2r-1 \ 2r} + a_{2r'+1} T_{2r'+1} + \dots + a_n T_n \ (r' \geq r).$$

Se una operazione Xf è portata nella forma (1) o più generalmente nella forma $Xf = \sum_{h,k \leq 2r} b_{hk} R_{hk} + \sum_i a_{2r+i} T_{2r+i}$ ($b_{hk} = -b_{kh}$), si vede chiaramente che essa trasforma in sè gli S_{n-1} di equazione $\sum_{i=1}^{n-2r} a_{2r+i} x_{2r+i} = c$ dove c è una costante arbitraria e le a_{2r+i} sono tali che $\sum a_{2r+i} \cdot a_{2r+i} = 0$. E viceversa. Se quindi chiamiamo *eliche* le traiettorie di un gruppo ad un parametro di movimenti, perchè le eliche di Xf appartengano all' S_n ambiente e non ad uno spazio lineare subordinato, è necessario che non esistano S_{n-1} trasformati in sè da Xf , e quindi che in (1) r sia il massimo intero contenuto in $\frac{n}{2}$ e che nessuno dei coefficienti h, a sia nullo.

2. *I gruppi a due parametri.* — Ci proponiamo di mostrare che ogni sottogruppo reale a due parametri del gruppo dei movimenti è abeliano. Incominciamo dal trattare alcuni casi particolari. È bene evidente che la cosa è vera se il gruppo è generato da due traslazioni. Supponiamo che il gruppo sia generato da una traslazione e da una rotazione: supponiamo che la rotazione sia portata nella forma (1) $R = \sum_1^r h_i R_{2i-1 \ 2i}$ e che la traslazione sia $T = \sum_1^n a_i T_i$. Siccome le traslazioni formano un sottogruppo invariante nel gruppo dei movimenti, sarà $(RT) = \varrho T$. Ma l'equazione

$$(RT) = \left(\sum_1^r h_i R_{2i-1 \ 2i} \sum_1^n a_i T_i \right) = - \sum_1^r a_{2i-1} h_i T_{2i} + \sum_1^r a_{2i} h_i T_{2i-1} = \varrho \sum_1^n a_i T_i$$

si spezza nelle altre

$$h_i a_{2i-1} = \varrho a_{2i} \quad h_i a_{2i} = -\varrho a_{2i-1} \ (i \leq r) \quad 0 = \varrho a_k \ (k > 2r).$$

Quindi o sarà $\varrho = 0$ $a_{2i-1} = a_{2i} = 0$ ($i < r$): il gruppo sarà abeliano e T non conterrà che indici $> 2r$. Oppure dalle prime equazioni si dedurrà $\varrho^2 = -1$ e quindi il gruppo non sarà reale. Quindi ogni gruppo reale generato da una traslazione e da una rotazione è abeliano; se la rotazione è della forma $R = \sum_1^r h_i R_{2i-1 \ 2i}$ la traslazione è della forma $T = \sum_1^{n-2r} a_{2r+i} T_{2r+i}$.

(1) Cfr. Bemporad, *Sui gruppi dei movimenti*, pag. 13. Annali della R. Scuola Normale Sup. di Pisa, tomo IX, od anche Schoute, *Le déplacement le plus général de l'espace à n dimensions*. Annales de l'Ecole Polytechnique de Delft, tomo VII, 1891.

Supponiamo ora che il gruppo sia generato da due rotazioni R ed R_1 ; supponiamo di più che R sia della forma (1): $R = \sum_1^{2r} h_i R_{2i-1\ 2i}$ e che sia $R_1 = \sum b_{hk} R_{hk}$ ($b_{hk} = -b_{kh}$, $b_{hh} = 0$). Se non è $(R R_1) = \varrho R$ sostituendo a R_1 una conveniente combinazione lineare di R e R_1 si può supporre che si abbia $(R R_1) = \varrho R_1$. Ora

$$(2) \quad (R R_1) = \sum_{\substack{ij \leq r \\ i \neq j}} h_i b_{2i2j} R_{2i-1\ 2j} + \sum h_i b_{2i2j-1} R_{2i-1\ 2j-1} - \sum h_i b_{2i-1\ 2j} R_{2i2j} - \\ - \sum h_i b_{2i-1\ 2j-1} R_{2i2j-1} + \sum_{\substack{i \leq r \\ k > 2r}} h_i b_{2ik} R_{2i-1k} - \sum h_i b_{2i-1k} R_{2ik}$$

$(R R_1)$ non contiene quindi termini in R_{2i2i-1} e quindi non può essere uguale a ϱR . Sia $(R R_1) = \varrho R_1$. Uguagliando i coefficienti di una stessa rotazione in (2) ed in ϱR_1 si ottiene:

$$(3) \quad \begin{cases} h_i b_{2i2j} - h_j b_{2i-12j-1} = \varrho b_{2i-12j} \\ h_i b_{2i-12j-1} - h_j b_{2i2j} = -\varrho b_{2i2j-1} \end{cases} \quad (ij \leq r)$$

$$(4) \quad \begin{cases} h_i b_{2i2j-1} + h_j b_{2i-12j} = \varrho b_{2i-12j-1} \\ h_i b_{2i-12j} + h_j b_{2i2j-1} = -\varrho b_{2i2j} \end{cases} \quad (i, j \leq r)$$

$$(5) \quad h_i b_{2ik} = \varrho b_{2i-1k} \quad h_i b_{2i-1k} = -\varrho b_{2ik} \quad (i \leq r, k > 2r)$$

$$(6) \quad 0 = \varrho b_{hk} \quad (h, k > 2r).$$

Dalle (6) si deduce $\varrho = 0$ o $b_{hk} = 0$. Se $\varrho = 0$ il gruppo è abeliano; le (5) ci dicono $b_{2ik} = b_{2i-1k} = 0$ ($i \leq r, k > 2r$): in R_1 non esistono quindi che operazioni R_{hk} con ambedue gli indici $\leq 2r$ od ambedue $> 2r$: potremo porre $R_1 = R'_1 + R''_1$. R'_1 sarà una qualunque combinazione lineare di operazioni R_{hk} per cui h e k sono $> 2r$. Quanto ad R'_1 esso potrà contenere le operazioni R_{2i-12i} con coefficienti qualunque; le altre operazioni della forma R_{2i-12j} , $R_{2i2j} \dots$ ($i, j \leq r$) dovranno avere coefficienti che soddisfacciano le (3), (4) che in questo caso divengono

$$(3') \quad \begin{cases} h_i b_{2i2j} - h_j b_{2i-12j-1} = 0 \\ h_i b_{2i-12j-1} - h_j b_{2i2j} = 0 \end{cases} \quad (4') \quad \begin{cases} h_i b_{2i2j-1} + h_j b_{2i-12j} = 0 \\ h_i b_{2i-12j} + h_j b_{2i2j-1} = 0 \end{cases}$$

È ben evidente che questi due sistemi di equazioni non possono essere soddisfatti che quando $h_i = \pm h_j$. Quindi R'_1 oltre alle operazioni R_{2i-12j} potrà solo contenere le operazioni $(R_{2i2j} \pm R_{2i-12j-1})$, $(R_{2i-12j} \mp R_{2i2j-1})$ e ciò quando in R sia $h_i = \pm h_j$ (si debbono prendere tutti i segni superiori o tutti i segni inferiori contemporaneamente).

Se ϱ non è 0, il gruppo non è reale. Ciò risulta evidente dalle (5) quando non sia $b_{2ik} = b_{2i-1k} = 0$ poichè allora si ha $\varrho^2 = -1$. Se poi $b_{2ik} = b_{2i-k} = 0$, si consideri il sistema di equazioni lineari omogenee nelle $b_{2i-12j-1}$, b_{2i-12j} , b_{2i2j} , b_{2i2j-1} formati dalle (3) e (4): affinchè questi coefficienti b non siano nulli, ϱ deve essere soluzione dell'equazione

$$0 = \begin{vmatrix} -\varrho & 0 & h_i & -h_j \\ 0 & -\varrho & h_j & -h_i \\ -h_i & -h_j & -\varrho & 0 \\ h_j & h_i & 0 & -\varrho \end{vmatrix} = \varrho^4 + \varrho^2 (h_i + h_j)^2 + \begin{vmatrix} h_i & h_j \\ h_j & h_i \end{vmatrix}^2$$

Ora questa equazione ammette solo radici nulle od immaginarie⁽¹⁾; talchè, se si richiede che il gruppo sia reale, non si potrà supporre che $\varrho = 0$. Infine se fossero nulli tutti i coefficienti b_{2ik} , b_{2i-1k} , b_{2i-12j} , b_{2i2j} ... R_1 non potrebbe contenere che le operazioni R_{2i-12i} per $i \leq r$ e le R_{hk} per $hk > 2r$ e quindi R_1 sarebbe permutabile con R . Concludiamo che il gruppo è ancora abeliano quando è formato da due rotazioni: se di più una delle rotazioni è della forma (1), la precedente discussione ci dà di quale forma deve essere l'altra rotazione.

Veniamo al caso generale. Siano $Xf = R + T$, $X_1f = R_1 + T_1$ le operazioni generatrici: si avrà $(XX_1) = \alpha Xf + \beta X_1f$. Ma $(XX_1) = (R R_1) + [(R T_1) + (T R_1)]$: $(R R_1)$ è una rotazione, $(R T_1) + (T R_1)$ una traslazione: quindi dovrà essere $(R R_1) = \alpha R + \beta R_1$, $(R T_1) + (T R_1) = \alpha T + \beta T_1$. La prima equazione ci dice che R , R_1 formano un gruppo, esso sarà abeliano e quindi o sarà $\alpha = \beta = 0$ ed Xf , X_1f genereranno esse pure un gruppo abeliano, oppure sostituendo al più ad X_1f la combinazione lineare $\alpha Xf + \beta X_1f$, si potrà supporre che sia $R_1 = 0$. Allora, essendo X_1f una traslazione T_1 , si dovrà avere $(XX_1) = \beta X_1f$ ossia $(R T_1) = \beta T_1$: quindi R , T_1 genereranno un gruppo che ancora dovrà essere abeliano, ed ancora abeliano sarà il gruppo generato da Xf ed X_1f . Il teorema è quindi dimostrato.

3. Possiamo ad esso dare la forma seguente: *Le superficie a due dimensioni immerse in uno spazio euclideo ad n dimensioni che ammettono un gruppo a due parametri di movimenti dello spazio ambiente sono sviluppabili (a curvatura nulla) e le traiettorie del gruppo sono le geodetiche della superficie.*

Non è questo che un caso particolare di un teorema del prof. Bianchi⁽²⁾

(1) Questa proprietà è vera per tutte quelle equazioni che si ottengono come la precedente sostituendo agli zeri della diagonale principale di un determinante emisimmetrico l'incognita ϱ ed uguagliando a 0.

(2) Bianchi, *Sugli spazi a 3 dimensioni che ammettono un gruppo di movimenti*. Memorie della Società Italiana delle Scienze, 1898, § 15.

per cui se uno spazio ad n dimensioni ammette un gruppo abeliano ad n parametri è a curvatura nulla e le traiettorie delle operazioni del gruppo rappresentano le geodetiche dello spazio. Nel nostro caso per quanto precede il gruppo a due parametri di movimenti dello spazio ambiente è abeliano; quindi il teorema.

4. Possiamo aggiungere alcune osservazioni circa le operazioni generatrici del gruppo. Supponiamo che $Xf = R + T$ sia della forma (1). Dovrà essere, posto, come prima, $X_1f = R_1 + T_1$, $(R R_1) = 0$ $(R T_1) + (T R_1) = 0$; quindi, come risulta dalle discussioni del n. 2, R_1 sarà della forma $R'_1 + R''_1$ dove R'_1 contiene soltanto indici $\leq 2r$ ed R''_1 solo indici $> 2r$. D'altra parte $(R T_1)$ non può contenere che T_i con indici $\leq 2r$, $(T R_1) = (T R''_1)$ non contiene che T_i con indici $> 2r$; affinché $(R T_1) + (T R_1) = 0$ deve essere partitamente $(R T_1) = 0$ $(T R_1) = 0$. Per la prima equazione risulterà dalle discussioni del n. 2 che T_1 non contiene che indici $> 2r$, poichè R è della forma (1). Quindi $R''_1 + T_1$ è una operazione che opera sulle sole variabili x_{2r+i} ; e con un conveniente movimento su tali variabili, che non cambierà $R_1 R'_1$ e trasformerà T di nuovo in una traslazione sulle x_{2r+i} , si potrà portare in forma analoga alla forma (1), in cui cioè la traslazione e la rotazione non hanno indici comuni: supponiamo che dopo ciò R''_1 contenga solo gli indici $\leq 2r_1$ e T_1 solo indici $> 2r_1$ ($r_1 \geq r$). Anche T non potrà allora contenere che indici $> 2r_1$, poichè $(T R_1) = (T R''_1) = 0$.

Cosicchè, riassumendo, con un conveniente movimento noi potremo ridurre le operazioni generatrici del gruppo $Xf = R + T$, $X_1f = R_1 + T_1$ contemporaneamente in tal forma che R ed R_1 non contengano che indici $\leq 2r_1$ e T e T_1 non contengano che indici $> 2r_1$. Sia dunque

$$Xf = R + \sum_{i=1}^{n-2r_1} a_{2r_1+i} T_{2r_1+i}, X_1f = R_1 + \sum_{i=1}^{n-2r_1} b_{2r_1+i} T_{2r_1+i}; \text{ il gruppo trasformerà}$$

in sè quegli $S_{n-1} \sum \alpha_{2r_1+i} x_{2r_1+i} = c$ dove c è una costante arbitraria e gli α_{2r_1+i} soddisfano le equazioni $\sum a_{2r_1+i} \alpha_{2r_1+i} = 0$ $\sum b_{2r_1+i} \alpha_{2r_1+i} = 0$. Affinchè tali S_{n-1} non esistano, e quindi il luogo dei punti in cui un punto dato è portato dalle operazioni del gruppo Xf , X_1f non appartenga ad uno spazio lineare subordinato, sarà necessario che le due ultime equazioni scritte non ammettano soluzione. Perciò deve essere $2r_1 \leq n-2$: se n è pari sarà quindi $2r_1 = n-2$ o $2r_1 = n$; se n è dispari non potrà essere che $2r_1 = n-1$. Possiamo quindi enunciare: *Se una superficie immersa in uno spazio ad un numero dispari di dimensioni (e non in uno spazio lineare subordinato), ammette un G_2 di movimenti dello spazio ambiente, per ogni suo punto passa un'elica immersa in uno spazio al più ad $n-1$ dimensioni contenuta totalmente in essa, poichè tale è l'elica traiettoria di quella operazione infinitesima del gruppo che non contiene traslazione. Analogamente si mostra che le superficie immerse in uno spazio ad un nu-*

mero pari di dimensioni che ammettono un G_2 di movimenti dello spazio ambiente sono di due specie: le une (corrispondenti al caso $2r_1 = n$) non contengono eliche di S_{n-1} , le altre (corrispondenti al caso $2r_1 = n - 2$) contengono solo eliche di S_{n-1} .

5. *Teoremi generali sui sottogruppi del gruppo dei movimenti e sui loro gruppi derivati.* — Con metodi analoghi a quelli tenuti nei numeri precedenti ci proponiamo ora di dimostrare alcuni teoremi generali che ci permetteranno di dedurre immediatamente i tipi dei gruppi di movimenti a tre parametri.

Un gruppo di movimenti non può mai avere il gruppo derivato ad un parametro. Infatti sia, se possibile, $X_1 f = R_1 + T_1$ l'unica operazione del gruppo derivato, siano $X_2 f = (R_2 + T_2) \dots X_m f = R_m + T_m$ le residue operazioni generatrici del gruppo, $X_1 f$ è permutabile con una qualunque operazione $X f$; infatti deve essere $(X_1 X) = \varrho X_1 f$ perchè $X_1 f$ è la sola operazione del gruppo derivato, e d'altra parte pel teorema del n. 2 ciò non può essere se non è $\varrho = 0$. D'altra parte dovranno esistere due operazioni la cui alternata è $X_1 f$, supponiamo che siano $X_2 f$ ed $X_3 f$: si avrà quindi $(X_2 X_3) = X_1 f$ ($X_2 (X_2 X_3) = (X_3 (X_2 X_3)) = 0$). $X_2 f$, $X_3 f$ non possono essere entrambe traslazioni perchè altrimenti $(X_2 X_3) = 0$. Supponiamo quindi che sia $X_2 f = R_2 + T_2$ una operazione della forma (1) e che sia $R_2 \neq 0$. Potrà essere $R_3 = 0$ od $R_3 \neq 0$. Sia $R_3 = 0$: si ponga

$$T_3 = \sum_1^r b_{2i} T_{2i} + \sum_1^r b_{2i-1} T_{2i-1} + \sum_{k \leq 2r} b_k T_k;$$

sarà:

$$X_1 f = (X_2 T_3) = (R_2 T_3) = - \sum_1^r b_{2i-1} h_i T_{2i} + \sum_1^r b_{2i} h_i T_{2i-1}.$$

Quindi sarà pure $X_1 f$ una traslazione. Si dovrà avere inoltre

$$0 = (X_2 X_1) = (R_2 X_1) = - \sum b_{2i-1} h_i^2 T_{2i-1} - \sum b_{2i} h_i^2 T_{2i}.$$

Dovrà quindi essere

$$b_{2i-1} h_i^2 = 0 \quad b_{2i} h_i^2 = 0 \quad (i \leq r)$$

e cioè $b_{2i-1} = b_{2i} = 0$ ($i \leq r$). Si deduce di qui che $(X_2 T_3) = 0$: quindi $X_1 f$ sarà nulla. L'ipotesi $R_3 = 0$ è quindi assurda.

Sia $R_3 \neq 0$: e precisamente $R_3 = \sum b_{hk} R_{hk}$ ($b_{hk} = -b_{kh}$).

Dall'ipotesi $(X_2 X_3) = X_1 f$ si dedurrà $(R_2 R_3) = R_1$, d'altra parte come già al n. 2 si avrà (formula (2))

$$\begin{aligned} R_1 = (R_2 R_3) = & \sum_{ij \leq r} h_i b_{2i2j} R_{2i-12j} + \sum_{ij \leq r} h_i b_{2i2j-1} R_{2i-12j-1} - \sum_{ij \leq r} h_i b_{2i-12j} R_{2i2j} - \\ & - \sum_{ij \leq r} h_i b_{2i-12j-1} R_{2i2j-1} - \sum_{\substack{i \leq r \\ k > 2r}} h_i b_{2i-1k} R_{2ik} + \sum_{\substack{i \leq r \\ k > 2r}} h_i b_{2ik} R_{2i-1k}. \end{aligned}$$

L'equazione $0 = (X_2 X_1)$ ci darà similmente $0 = (R_2 R_1)$, quindi dovrà essere

$$0 = (R_2 R_1) = -\sum h_i^2 b_{2i2j} R_{2i2j} - \sum h_i^2 b_{2i2j-1} R_{2i2j-1} - \sum h_i^2 b_{2i-12j} R_{2i-12j} - \\ - \sum h_i^2 b_{2i-12j-1} R_{2i-12j-1} + \sum h_i h_j b_{2i2j} R_{2i-12j-1} - \sum h_i h_j b_{2i2j-1} R_{2i-12j} - \\ - \sum h_i h_j b_{2i-12j} R_{2i2j-1} + \sum h_i h_j b_{2i-12j-1} R_{2i2j} - \sum h_i^2 b_{2ik} R_{2ik} - \sum h_i^2 b_{2i-1k} R_{2i-1k}.$$

Si hanno così le equazioni

$$(7) \quad h_i^2 b_{2ik} = h_i^2 b_{2i-1k} = 0 \quad (k > 2r \ i \leq r)$$

$$(8) \quad \begin{aligned} b_{2i2j} (h_i^2 + h_j^2) - 2h_i h_j b_{2i-12j-1} &= 0 \\ 2h_i h_j b_{2i2j} - (h_i^2 + h_j^2) b_{2i-12j-1} &= 0 \end{aligned} \quad (ji \leq r)$$

$$(9) \quad \begin{aligned} b_{2i2j-1} (h_i^2 + h_j^2) + 2h_i h_j b_{2i-12j} &= 0 \\ 2h_i h_j b_{2i2j-1} + (h_i^2 + h_j^2) b_{2i-12j} &= 0 \end{aligned} \quad (ij \leq r)$$

Le (7) ci dicono $b_{2ik} = b_{2i-1k} = 0$ quindi R_3 si spezzerà in due parti $R'_3 R''_3$: l'una R'_3 contenente solo R_{hk} con indici $\leq 2r$; l'altra R''_3 contenente solo R_{hk} con indici $> 2r$ e quindi permutabile con R_2 . Quanto ai coefficienti di R'_3 essi dovranno soddisfare le (8) (9). Affinchè queste equazioni siano risolubili dovrà essere

$$0 = \left| \begin{array}{cc} h_i^2 + h_j^2 & 2h_i h_j \\ 2h_i h_j & (h_i^2 + h_j^2) \end{array} \right| = (h_i^2 + h_j^2)^2 - 4h_i^2 h_j^2 = (h_i^2 - h_j^2)^2$$

Sarà quindi $h_i = \pm h_j$ e si dedurrà $b_{2i2j} = \pm b_{2i-12j-1} \ b_{2i-12j} = \pm b_{2i2j-1}$. Ma queste sono le soluzioni di (3') (4') che esprimono che R_2 ed R'_3 sono permutabili: quindi la condizione $(R_2 R_1) = (R_2 (R_2 R_3)) = 0$ porta seco l'altra $R_1 = (R_2 R_3) = 0$. Essendo R_3 permutabile con R_2 porremo $R_3 = R'_3 + R''_3$ come precedentemente; e si avrà $X_1 f = (X_2 X_3) = (R_2 T_3) + (T_2 R''_3)$ poichè $(T_2 R'_3) = 0$. $(R_2 T_3)$ sarà una traslazione non contenente che indici $\leq 2r$; $(T_2 R''_3)$ sarà una traslazione non contenente che indici $> 2r$ e quindi sarà permutabile con R_2 . Quindi si avrà $0 = (X_2 (X_2 X_3)) = (R_2 (R_2 T_3))$ poichè $(R_2 (T_2 R''_3)) = 0$. Ma la discussione fatta precedentemente dell'equazione $(X_2 (X_2 X_3)) = 0$ pel caso in cui $R_3 = 0$ ci dice allora che $(R_2 T_3) = 0$; e quindi si avrà che $X_1 f = (X_2 X_3) = (T_2 R''_3)$ è una traslazione contenente soltanto indici $> 2r$. L'equazione $(X_2 X_1) = 0$ sarà allora identicamente soddisfatta, ma dovrà ancora essere soddisfatta l'altra $(X_1 X_3) = 0$ ossia, $((T_2 R''_3) R''_3) = 0$. Ricadiamo così nel caso precedentemente trattato scambiati gli indici 2 e 3, e quindi ancora si dedurrà $(T_2 R''_3) = 0$.

Le equazioni $(X_2 (X_2 X_3)) = 0 \ (X_3 (X_2 X_3)) = 0$ conducono a conchiudere $(X_2 X_3) = 0$: quindi è dimostrato completamente il teorema enunciato.

Più generalmente potremo enunciare il risultato del presente numero nel modo seguente: *Una operazione del gruppo derivato di un gruppo di*

movimenti non è permutabile con tutte le operazioni del gruppo (più precisamente essa non è permutabile neppure con tutte le operazioni tali che alternate con una operazione conveniente del gruppo, danno l'operazione stessa).

6. In modo analogo possiamo ormai dimostrare che *se il gruppo derivato è a due parametri le operazioni del gruppo sono traslazioni*.

Siano infatti X_1f , X_2f le due operazioni del gruppo derivato, esse sono permutabili in virtù del n. 2. D'altra parte pel teorema precedente non debbono essere permutabili con ogni operazione del gruppo: supponiamo che X_1f non sia permutabile con X_3f , e supponiamo di più che $(X_1 X_3)$, — che è diversa da X_1f poichè altrimenti $X_1f X_3f$ genererebbero un gruppo a due parametri non abeliano, — sia $X_2f: (X_1 X_3) = X_2f$. Siccome si ha $(X_1 X_2) = (X_1 (X_1 X_3)) = 0$ non potrà essere $(X_2 X_3) = ((X_1 X_3) X_3) = 0$ per quanto si vide nel n. 5; nè potrà essere $(X_2 X_3) = \beta X_2$ pel n. 2; quindi si avrà $(X_2 X_3) = ((X_1 X_3) X_3) = \alpha X_1f + \beta X_2f$ con $\alpha \neq 0$. Ne segue che X_3f non può essere una traslazione, altrimenti $X_2f = (X_1 X_3)$ sarebbe una traslazione pure essa ed $(X_2 X_3) = 0$. Ma allora, ragionando sull'equazione $(X_1 (X_1 X_3)) = 0$ come nel numero precedente sulla $(X_2 (X_2 X_3)) = 0$, segue che le rotazioni R_1, R_3 sono permutabili, onde viene che X_2f è una traslazione. Ma allora anche $(X_2 X_3) = \alpha X_1f + \beta X_2f$ è una traslazione e quindi X_1f non può essere che una traslazione essa pure. Resta così dimostrato il teorema. Ma ora è facile mostrare di più che è $\beta = 0$, onde verrà che, *supposto che il gruppo derivato di un gruppo di movimenti sia un gruppo a due parametri generato dalle operazioni X_1f, X_2f , esiste nel gruppo una operazione X_3f tale che*

$$(X_1 X_3) = X_2f \quad (X_3 X_2) = X_1f.$$

Infatti noi abbiamo visto che X_1f ed X_2f sono due traslazioni e che esiste una operazione X_3f tale che

$$(X_1 X_3) = X_2f \quad (X_3 X_2) = \alpha X_1f + \beta X_2f \quad (\alpha \neq 0).$$

Perchè queste equazioni possano essere soddisfatte da movimenti non dovranno potersi trovare dei coefficienti reali λ, μ tali che

$$(X_3 \lambda X_1 + \mu X_2) = \varrho (\lambda X_1f + \mu X_2f).$$

È facile vedere che perchè ciò accada è necessario che sia $\alpha \geq \frac{\beta^2}{4}$. Sarà

quindi $\alpha > 0$ e chiamando $X_1f X_3f$ le operazioni $\frac{1}{\sqrt{\alpha}} X_1f, \frac{1}{\sqrt{\alpha}} X_3f$ si avrà

$$(X_1 X_3) = X_2f \quad (X_3 X_2) = X_1f + \beta X_2f \quad (4 \geq \beta^2 \geq 0).$$

Supponiamo X_3f ridotto alla forma (1); dalla prima di queste equazioni segue, ricordando che X_1f ed X_2f sono traslazioni, che X_2f non contiene

che indici $\leq 2r$, e dalla seconda che lo stesso vale quindi per $X_1 f$. Sia $X_1 f = \Sigma b_{2i} T_{2i} + \Sigma b_{2i-1} T_{2i-1}$. Come nel n. 5 si avrà

$$\begin{aligned} X_2 f &= (X_1 X_3) = + \Sigma b_{2i-1} h_i T_{2i} - \Sigma b_{2i} h_i T_{2i-1} \\ X_1 f + \beta X_2 f &= \Sigma (b_{2i} + \beta b_{2i-1} h_i) T_{2i} + \Sigma (b_{2i-1} - \beta b_{2i} h_i) T_{2i-1} = \\ &= (X_3 X_2) = \Sigma b_{2i-1} h_i^2 T_{2i-1} + \Sigma b_{2i} h_i^2 T_{2i}. \end{aligned}$$

Quindi si dedurranno le equazioni

$$b_{2i} + \beta b_{2i-1} h_i = b_{2i} h_i^2 \quad b_{2i-1} - \beta b_{2i} h_i = b_{2i-1} h_i^2.$$

Affinchè queste equazioni lineari in b_{2i}, b_{2i-1} siano risolubili deve aversi

$$\begin{vmatrix} h_i^2 - 1 & -\beta h_i \\ \beta h_i & h_i^2 - 1 \end{vmatrix} = (h_i^2 - 1)^2 + \beta^2 h_i^2 = (h_i^2)^2 - h_i^2(2 - \beta^2) + 1 = 0.$$

Affinchè h_i^2 non sia immaginaria dovrà quindi essere

$$0 \leq (2 - \beta^2)^2 - 4 = \beta^2(\beta^2 - 4),$$

che unito alla limitazione $0 \leq \beta^2 \leq 4$ darà $\beta^2 = 0$ o $\beta^2 = 4$. Se $\beta^2 = 4$ è $h_i^2 = -1$ e quindi h_i immaginario; quindi deve essere $\beta^2 = 0$: ne risulta dimostrato il teorema.

7. *I gruppi a tre parametri.* — Il prof. Bianchi ⁽¹⁾ ha classificato le composizioni dei gruppi a tre parametri diverse per isomorfismi reali: dai tipi di gruppi ivi indicati si vede facilmente che i soli gruppi che non hanno che sottogruppi reali a due parametri non abeliani, sono quelli che hanno la composizione seguente:

- (I) $(X_1 X_2) = 0 \quad (X_2 X_3) = 0 \quad (X_3 X_1) = 0$
- (II) $(X_1 X_2) = 0 \quad (X_2 X_3) = X_1 f \quad (X_3 X_1) = 0$
- (III) $(X_1 X_2) = 0 \quad (X_2 X_3) = X_1 f + h X_2 f \quad (X_3 X_1) = X_2 f \quad 0 \leq |h| \leq 2$
- (IV) $(X_1 X_2) = X_3 f \quad (X_2 X_3) = X_1 f \quad (X_3 X_1) = X_2 f.$

Un gruppo di movimenti a tre parametri deve essere di uno di questi tipi. Ma il teorema del n. 5 esclude il tipo (II). I teoremi del n. 6 ci dicono che si hanno gruppi di movimenti del tipo (III) solo quando $h = 0$. D'altra parte i ragionamenti stessi del n. 6 danno il modo di costruire un gruppo del tipo (III) per $h = 0$; il gruppo formato da tre traslazioni è un gruppo del tipo (I); il gruppo formato dalle tre rotazioni di un S_3 subordinato è un gruppo del tipo (IV), quindi possiamo raccogliere il seguente teorema:

Nel gruppo dei movimenti dello spazio ad n dimensioni esistono solo sottogruppi reali a tre parametri aventi le composizioni seguenti:

$$\begin{aligned} (X_1 X_2) &= 0 \quad (X_2 X_3) = 0 \quad (X_3 X_1) = 0 \\ (X_1 X_2) &= 0 \quad (X_2 X_3) = X_1 f \quad (X_3 X_1) = X_2 f \quad (X_1 f, X_2 f \text{ sono traslazioni}) \\ (X_1 X_2) &= X_3 f \quad (X_2 X_3) = X_1 f \quad (X_3 X_1) = X_2 f \quad (2). \end{aligned}$$

⁽¹⁾ Bianchi, *Sugli spazi a tre dimensioni che ammettono gruppi di movimenti*. Memorie della Società Italiana delle Scienze, 1898, § 13.

⁽²⁾ Si può chiedere se esisteranno gruppi a tre parametri colle operazioni non in-

8. *I sottogruppi a due e tre parametri del gruppo di movimenti dello spazio a curvatura costante positiva.* — Se noi consideriamo che il gruppo dei movimenti di uno spazio a curvatura costante positiva ad n dimensioni è in isomorfismo reale col gruppo delle rotazioni di uno spazio euclideo ad $n + 1$ dimensioni, dai teoremi dimostrati nei numeri precedenti dedurremo: *Nel gruppo dei movimenti di uno spazio a curvatura costante positiva: 1°) i sottogruppi reali a due parametri sono abeliani; 2°) i sottogruppi reali a tre parametri hanno la composizione $(X_1 X_2) = X_3 f$, $(X_2 X_3) = X_1 f$, $(X_3 X_1) = X_2 f$ del gruppo dei movimenti della sfera o sono abeliani; 3°) il gruppo derivato di un sottogruppo reale qualunque non è mai ad uno o due parametri soltanto.*

Fisica. — *Sulla luminescenza dei cristalli.* Nota di A. POCHETTINO, presentata dal Socio P. BLASERNA.

In una Nota precedente⁽¹⁾ ho riferito i risultati di alcune esperienze sulla catodo-luminescenza di alcuni cristalli naturali intese a completare ed estendere le ricerche sullo stesso soggetto compiute da Maskelyne⁽²⁾ e da G. C. Schmidt⁽³⁾. Prima di esporre i risultati delle ricerche d'indole quantitativa sulla polarizzazione parziale che, in alcuni cristalli, è caratteristica di questa luminescenza, credo opportuno riferire qui alcune ulteriori ricerche qualitative da me compiute sulla luminescenza prodotta in certi cristalli artificiali e naturali dalle radiazioni del Radio e dai raggi del Röntgen, e nel vetro deformato meccanicamente dai raggi catodici.

Per le esperienze colle radiazioni del Radio ho potuto disporre di 20 milligrammi di bromuro di Radio del Giesel, chiusi al solito modo in una capsuletta di ebanite munita di una piccola finestra di mica; il cristallo, fissato in una determinata orientazione veniva completamente ricoperto con carta nera, meno una piccola porzione circolare (circa 3 millimetri di diametro) in corrispondenza della faccia del cristallo che si voleva studiare; la capsula contenente il bromuro di Radio veniva accostata a questa porzione scoperta del cristallo fino a produrvi una luminescenza sufficientemente vivace che veniva osservata al solito modo con un Nicol analizzatore.

dipendenti, per cui, cioè, le varietà di intransitività siano superficie a due dimensioni. Da un teorema dimostrato nel secondo capitolo della mia tesi di laurea (che sarà pubblicata negli Annali della Scuola Normale Sup. di Pisa) risulta che questo non accade altro che quando il gruppo si può con un movimento ridurre ad operare su due o tre sole variabili. Le varietà di intransitività sono allora piani o sfere dello spazio ordinario.

(1) Rend. Acc. Lincei, XIII (5), pag. 301, 1904.

(2) Roc. Roy. Soc. London, 28, pag. 477, 1879.

(3) Wied. Ann., 60, pag. 740, 1897.

I raggi Röntgen vennero prodotti con un tubo *focus*, rinchiuso in una scatola di cartone annerito, ed alimentato da un rocchetto d'induzione da 5 cm. di scintilla; il cristallo, ricoperto come nelle esperienze col Radio di carta nera, veniva fissato nell'orientazione voluta su apposito sostegno in vicinanza della parete della scatola di cartone posta di fronte all'anticatodo, di modo che se ne poteva osservare la fluorescenza in qualunque direzione.

Per alcuni cristalli ho pure analizzata la fluorescenza prodotta dai raggi violetti, come già fecero Sohncke⁽¹⁾ e Schmidt⁽²⁾, adoperando la luce proveniente da una lampada ad arco filtrata attraverso un filtro di Wood.

Ecco senz'altro il risultato di queste ricerche:

I. Cristalli artificiali.

1. *Platinocianuro di Magnesio*. (Sistema dimetrico). $a:c = 1:0,5863$ ⁽³⁾. Ho potuto disporre di un bel cristallo presentante le forme $\{001\}$, $\{100\}$, $\{010\}$ e $\{111\}$, dalle dimensioni $10 \times 10 \times 6$ millimetri rispettivamente secondo gli assi x , y , z .

Sottoposto ai raggi del Radio emette luce debole di colore rosso-scarlatta sulle faccie delle forme $\{100\}$ e $\{010\}$, più vivace, ma dello stesso colore sulle faccie delle forme $\{001\}$ e $\{111\}$, scomparsa subito dopo allontanato il Radio.

Questa luminescenza è pochissimo polarizzata; per estinguere questa piccola parte di luminescenza polarizzata occorre disporre la diagonale minore del Nicol analizzatore secondo l'asse z del cristallo.

Esposto ai raggi Röntgen esso si comporta come sotto i raggi del Radio; la luminescenza emessa in queste condizioni è pure rosso-scarlatta.

Un altro cristallo della stessa sostanza presentante le forme $\{100\}$, $\{010\}$ e $\{001\}$ e dalle dimensioni: $11 \times 11 \times 4$ millimetri rispettivamente secondo gli assi x , y , z diede, cimentato nello stesso modo del precedente, gli stessi risultati.

2. *Platinocianuro di Potassio e Litio*. (Sistema trimetrico). $a:b:c = 0,4417:1:0,7166$. Vennero esaminate le forme $\{010\}$ e $\{011\}$ di un cristallo quasi tabulare limitato da dette forme e troncato irregolarmente alle estremità. Le dimensioni dell'esemplare sono le seguenti: secondo l'asse $y = 10$ millimetri, secondo l'asse $z = 20$ millimetri, lunghezza fra le due estremità troncate $= 22$ millimetri.

Esposto ai raggi del Radio diede su tutte le faccie una luminescenza arancio-verdastra vivissima, scomparsa subito dopo allontanato il Radio,

⁽¹⁾ Sitz. ber. K. B. Ak. Wiss. München, 1896, I, pag. 75.

⁽²⁾ Loc. cit.

⁽³⁾ Rammelsberg, *Kryst. Phys. Chem.*, II, pag. 24.

dotata di polarizzazione sensibile, per estinguer la quale occorreva disporre la diagonale minore del Nicol analizzatore secondo lo spigolo $[1\bar{1}0]$. La luminescenza emessa dalle due estremità troncate del cristallo non presenta tracce di polarizzazione.

Esposto ai raggi Röntgen lo stesso cristallo, diede parimente su tutte le faccie una luminescenza arancio-verdastra debole e senza traccia di polarizzazione sensibile.

Sottoposto ai raggi violetti non diede traccia alcuna di fluorescenza.

Lo stesso risultato diede un altro cristallo della stessa sostanza presentante le faccie delle forme $\{010\}$, $\{011\}$ e $\{001\}$ e su per giù delle stesse dimensioni del precedente.

3. *Platinocianuro di calcio*. (Sistema trimetrico). $a:b:c = 0,90:1:0,3365$. Di questa sostanza vennero esaminati quattro diversi cristalli:

1° Di forma quasi tabulare, presentante le forme $\{100\}$, $\{010\}$ e $\{120\}$, le estremità sono troncate irregolarmente. Le dimensioni di questo esemplare sono: secondo l'asse $y = 8$ millimetri, secondo l'asse $x = 23$ millimetri, lunghezza $= 35$ millimetri.

2° Di forma prismatica allungata, presentante le forme $\{010\}$ e $\{120\}$; le dimensioni sono: secondo l'asse $y = 5$ millimetri, secondo l'asse $x = 7$ millimetri, lunghezza fra le due estremità troncate irregolarmente $= 10$ millimetri.

3° Come il precedente, su per giù colle stesse dimensioni.

4° Come i due precedenti colle dimensioni: secondo l'asse $y = 5$ millimetri, secondo l'asse $x = 9$ millimetri, lunghezza $= 34$ millimetri.

Esposti ai raggi del Radio tutti e quattro gli esemplari diedero su tutte le faccie una luminescenza vivissima di colore verde puro, scomparso subito dopo allontanato il Radio, con polarizzazione marcatissima per estinguer la quale occorreva disporre la diagonale minore dell'analizzatore secondo lo spigolo $[00\bar{1}]$. La luminescenza emessa dalle estremità irregolarmente troncate non presenta traccia sensibile di polarizzazione.

Esposti ai raggi Röntgen essi diedero ancora su tutte le faccie una luminescenza molto vivace dello stesso colore verde-brillante con tracce sensibilissime di polarizzazione parziale nello stesso modo di quella rilevata sotto l'azione del Radio.

Alla luce violetta venne cimentato il solo cristallo 1°. Facendo colpire dalla luce eccitante le due estremità troncate irregolarmente ed osservando la fluorescenza così eccitata sia attraverso le faccie della forma $\{010\}$ che a quelle delle forme $\{100\}$ e $\{120\}$, si osservò sempre una luminescenza verde vivissima marcatamente polarizzata in modo che per estinguerla occorreva disporre la diagonale minore dell'analizzatore secondo lo spigolo $[00\bar{1}]$.

4. *Platinocianuro di Potassio e Sodio*. (Sistema monoclinico). $a:b:c = 0,8516:1:0,4713$. Di questa sostanza vennero esaminati due cristalli am-

bedue presentanti le forme $\{100\}$, $\{001\}$ e $\{110\}$. Le dimensioni principali sono per l'uno: secondo l'asse $z = 11$ millimetri, secondo l'asse $y = 19$ millimetri e per l'altro rispettivamente 6 e 25 millimetri.

Esposti ai raggi del Radio diedero ambedue una fluorescenza verde leggermente giallastra scomparsa subito dopo allontanato il Radio, vivacissima su tutte le faccie. Quella emessa dalle forme $\{100\}$ e $\{110\}$ è marcatamente polarizzata in modo che per estinguerla occorre disporre la diagonale minore del Nicol analizzatore secondo lo spigolo $[00\bar{1}]$. La luminescenza emessa dalla forma $\{001\}$ non presenta tracce sensibili di polarizzazione alcuna.

Esposti ai raggi Röntgen, i due cristalli si comportarono come sotto l'azione dei raggi del Radio.

5. *Platinocianuro di Bario*. (Sistema monoclinico). $a:b:c = 0,8698:1:0,4794$. Vennero esaminate le forme $\{100\}$, $\{110\}$ e $\{010\}$ in un cristallo di forma a prisma troncato irregolarmente dalle dimensioni: secondo l'asse $x = 8$ millimetri, secondo l'asse $y = 24$ millimetri, altezza $= 12$ millimetri.

Esposto ai raggi del Radio diede una luminescenza vivissima di color verde scomparso subito dopo allontanato il Radio, marcatamente polarizzata per modo che per estinguerla occorreva disporre la diagonale minore del Nicol analizzatore secondo lo spigolo $[00\bar{1}]$.

Ai raggi Röntgen lo stesso cristallo si comportò del tutto analogamente.

Esposto ai raggi violetti in modo che il fascio eccitante cadesse su una delle testate del prisma e osservando la fluorescenza prodotta, di colore verde, attraverso le faccie delle forme $\{110\}$ e $\{100\}$, venne trovata sensibilmente polarizzata in modo che per estinguerla occorreva disporre la diagonale minore del Nicol analizzatore secondo lo spigolo $[00\bar{1}]$.

6. *Platinocianuro di Erbio*. (Sistema trimetrico). $a:b:c = 0,8962:1:0,619$. Venne studiato un cristallo dalle dimensioni $15 \times 11 \times 17$ millimetri formato dalle quattro faccie del prisma $\{110\}$ e dalle sue basi $\{001\}$.

Esposto ai raggi del Radio e ai raggi Röntgen non diede traccia alcuna di luminescenza.

Alla luce violetta incidente su una base diede una fluorescenza rosso-scarlatta che, osservata attraverso una delle faccie del prisma si rivelò essere quasi totalmente polarizzata per modo che per estinguerla occorreva disporre la diagonale minore dell'analizzatore secondo l'asse del prisma. Illuminando invece una delle faccie del prisma ed osservando attraverso una delle basi, si ha una luminescenza ancora rosso-scarlatta, ma prima di qualsiasi traccia sensibile di polarizzazione.

7. *Platinocianuro di Ittrio*. (Sistema trimetrico). $a:b:c = 0,892:1:0,6157$. Venne studiato un cristallo simile al precedente di platinocianuro di Erbio, di dimensioni: $22 \times 15 \times 12$ millimetri, il quale cimentato nello stesso modo del precedente diede gli stessi risultati ⁽¹⁾.

(1) È mio dovere ringraziare vivamente il prof. C. Montemartini alla cui cortesia debbo l'aver avuto a mia disposizione questa collezione di Platinocianuri.

II. Cristalli naturali.

I cristalli, di cui si fa menzione qui, sono gli stessi già descritti nella mia Nota precedente più su ricordata.

1. *Scheelite* (sistema dimetrico).

Sotto i raggi Röntgen tutti i cristalli diedero una luminescenza debolissima di colore bleu, scomparsa istantaneamente; la luminescenza emessa dalle faccie della forma $\{111\}$ (vennero studiate solo queste perchè più grandi) presenta deboli tracce di polarizzazione per estinguere la quale occorre disporre la diagonale minore dell'analizzatore normalmente all'asse z .

Sotto i raggi del Radio tutti i cristalli diedero una luminescenza debole, parimenti di colore bleu, senza tracce sensibili di polarizzazione. Questa luminescenza non scompare subito dopo allontanato il Radio, ma come venne osservato nella Kunzite dal Baskerville (¹), dura per un certo tempo. Questa durata della luminescenza dipende dalla durata dell'esposizione ai raggi del Radio fino ad un certo limite, al di là del quale, qualunque sia il tempo di esposizione, la durata della luminescenza non varia più. Ecco per esempio i dati relativi ad un ottaedro di Scheelite:

Durata dell'esposizione										
in secondi	2	4	8	12	20	30	35	50	120	
Durata della luminescenza in secondi										
	17	26	32	41	48	50	51	51	50	

Questa sostanza non presenta, almeno nei campioni da me esaminati, alcuna traccia di fluorescenza ordinaria quando viene sottoposta ai raggi violetti.

2. *Fosgenite* (Sistema dimetrico).

Esposto ai raggi Röntgen il cristallo da me studiato, non diede traccia di luminescenza su nessuna faccia.

Esposto ai raggi del Radio dà una luminescenza di colore bleu, molto debole e non presentante traccia alcuna di polarizzazione. Come la radioluminescenza della Kunzite e della Scheelite, presenta anche quella della Fosgenite la proprietà di durare per un certo tempo anche dopo allontanato il Radio. I seguenti numeri corrispondenti ad osservazioni fatte sulla faccia $\{001\}$ danno un'idea del fenomeno:

Durata dell'esposizione in									
secondi	10	16	26	32	48	60	120		
Durata della luminescenza									
in secondi	2	8	16	20	26	27	26		

(¹) Science, sett. 4, 1903.

3. *Cerussite* (Sistema trimetrico). Venne studiato il primo dei due cristalli menzionati nella Nota citata.

Esposto ai raggi del Radio diede una luminescenza di colore bluastra, debolissima, istantanea. Quella emessa dalle faccie delle forme $\{110\}$ e $\{100\}$ presenta deboli tracce di polarizzazione per estinguere la quale occorre disporre la diagonale minore del Nicol analizzatore secondo l'asse z ; quella emessa dalla faccia $\{001\}$ non presenta traccia alcuna di polarizzazione sensibile.

Esposto ai raggi Röntgen non diede luminescenza sensibile.

4. *Apatite* (Sistema esagonale).

La fluorescenza prodotta dai raggi del Radio è molto debole, di colore giallo-verdastro, istantanea, presentante sulle faccie delle forme $\{01\bar{1}\}$ e $\{21\bar{1}\}$ una debolissima traccia di polarizzazione per estinguere la quale occorre disporre la diagonale minore dell'analizzatore secondo l'asse del prisma esagono; la luminescenza emessa dalle faccie della forma $\{111\}$ è completamente priva di polarizzazione.

Su uno di questi cristalli ho voluto ripetere le esperienze compiute dal Sohncke colla luce dell'arco voltaico; cioè ho studiato lo stato di polarizzazione della fluorescenza: *a*) eccitata da un raggio normale alla faccia $\{111\}$ osservandola attraverso una faccia del prisma esagono; *b*) eccitata da un raggio normale ad una faccia del prisma esagono, osservandola attraverso una faccia della forma $\{111\}$. Conformemente ai risultati del Sohncke, ho trovato che la fluorescenza, pure di colore verde-giallastro, nel primo caso è polarizzata quasi totalmente in modo che per estinguerla occorre disporre la diagonale minore dell'analizzatore secondo l'asse del prisma esagono; nel secondo caso è completamente priva di polarizzazione.

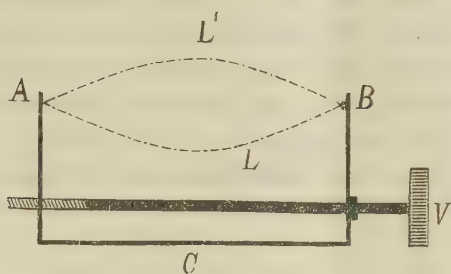
Operando coi raggi Röntgen non ho potuto osservare fluorescenza di sorta.

III. Vetro deformato meccanicamente.

Già nella mia Nota precedentemente citata avevo notato come un'anisotropia prodotta artificialmente in un corpo amorfo, produce una polarizzazione più o meno parziale nella sua catodo-luminescenza, e come per estinguere la parte polarizzata di questa occorre disporre la diagonale minore del Nicol analizzatore parallelamente alla direzione di trazione e normalmente alla direzione di compressione.

L'interesse notevole che può presentare tale diversità di comportamento fra un corpo teso e un corpo compresso, mi ha indotto a ripetere le esperienze cercando di eliminare tutte le possibili cause d'errore tanto più temibili in quanto si tratta di un fenomeno di estrema delicatezza. Ho operato quindi così: Presa una lamina di ottone dello spessore di due millimetri e

delle dimensioni 100×25 millimetri, venne ripiegata due volte ad angolo retto come nella figura A C B, poco sotto le due estremità vennero praticate due scanalature trasversali A e B, nelle quali venivano introdotte due lamine sottili di vetro da coprioggetti, larghe ciascuna 10 mm., mediante poi la vite V si facevano accostare le estremità A e B della lamina di ottone e allora le due lamine di vetro si flettevano ed era facile disporre le cose in modo che una L' si flettesse colla convessità in alto, l'altra L con la



convessità in basso; in tali condizioni evidentemente lo strato superficiale superiore della lamina L' si trova in uno stato di tensione, con l'asse secondo la linea mediana A B, mentre lo strato superficiale superiore della lamina L si trova in uno stato di compressione con l'asse nella stessa direzione.

L'apparecchio, così montato veniva introdotto nel tubo catodico altrove già descritto, in modo che il fascio di raggi catodici battesse contemporaneamente sulle due lastrine. Osservando con un Nicol analizzatore la luminescenza proveniente dalle due lastrine, questa venne trovata debolmente polarizzata, ma per estinguere quella proveniente da L' occorreva disporre la diagonale minore dell'analizzatore secondo A B, mentre per estinguere quella proveniente da L bisognava disporre la diagonale minore dell'analizzatore normalmente ad A B. Analoghi risultati ottenni osservando dei pezzi di gomma tesi o compressi e cimentati ai raggi catodici.

In tal modo venne nuovamente riconfermato quanto esponevo nella Nota già citata.

In un lavoro recente ⁽¹⁾ il sig. G. T. Beilby studiando la fosforescenza prodotta dai raggi β e γ del Radio, e l'alterazione che subisce la superficie specialmente del Platinocianuro di Bario quando sia sottoposta per un certo tempo all'azione di quei raggi, richiama l'attenzione sulla analogia stretta

(¹) Nature, marzo 16, 1905, pag. 476.

che vi è fra l'effetto delle radiazioni del Radio e quello prodotto da un cambiamento dallo stato cristallino allo stato amorfo.

Seguendo questo concetto ho voluto studiare lo stato di polarizzazione della luce di fluorescenza emessa da un cristallino di Platinocianuro di Calcio esposto per lungo tempo all'azione dei raggi del Radio.

Naturalmente non ho potuto fare misure fotometriche sulla quantità di luce polarizzata e per la debolezza della luce da studiare e per il deterioramento che subisce la superficie emittente durante la misura, mi sono quindi limitato ad apprezzare così ad occhio; malgrado la rozzezza di queste determinazioni ho potuto però constatare che di pari passo colla diminuzione della fluorescenza si nota pure una diminuzione nella quantità della luce polarizzata, tanto che dopo cinque giorni di esposizione non è più facile neppure decidere se la luce emessa contenga o no una porzione polarizzata.

Questo fatto, mi sembra, potrebbe andare in appoggio alle vedute del sig. Beilby.

Fisica. — *Sugli effetti di correnti continue interrotte ed alternate e di onde hertziane sul ritardo di magnetizzazione nei corpi magnetici in campi Ferraris* ⁽¹⁾. Nota del prof. RICCARDO ARNÒ, presentata dal Socio COLOMBO.

In correlazione ad alcuni miei precedenti lavori sugli effetti di correnti continue, interrotte ed alternate, e di onde hertziane, sul ritardo di magnetizzazione nei corpi magnetici in campi Ferraris ⁽²⁾, ho stabilito una nuova ricerca sperimentale con lo scopo precipuo di studiare il comportamento di un cilindro di acciaio in un campo magnetico rotante sotto l'azione di una serie di correnti alternate e di correnti interrotte della stessa intensità, ma rispettivamente di frequenza diversa e con un numero variabile di interruzioni ⁽³⁾.

⁽¹⁾ Lavoro eseguito nel Laboratorio di elettrotecnica del R. Istituto Tecnico Superiore di Milano (Istituzione Carlo Erba) coll'assistenza del sig. ingegnere Giuseppe Comboni.

⁽²⁾ Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 1° sem., 1904, pag. 272; Atti dell'Associazione elettrotecnica italiana (Comunicazione fatta alla sezione di Milano nella seduta del 25 maggio 1904; Rendiconti del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere, 1905, serie II, vol. XXXVIII, pag. 142; Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, 1° sem., 1905, pag. 278; Rendiconti del R. Istituto Lombardo di scienze e lettere, 1905, serie II, vol. XXXVIII, pag. 438; Rendiconti della R. Accademia dei Lincei (Seduta del 2 aprile 1905).

⁽³⁾ Osservo che per tenere conto della variazione della resistenza induttiva della spirale S — destinata ad essere percorsa dalla corrente alternata su cui si sperimentava

Quivi in appresso sono esposti i nuovi fatti che ho constatato, e che credo bene riassumere facendo contemporaneamente una completa sintesi di tutti gli altri fatti risultanti dai miei precedenti studî e già resi noti nelle varie mie Note sovraccitate.

I risultati principali, succintamente riepilogati, di queste ricerche intese a studiare il fenomeno della variazione di isteresi in un cilindro di acciaio in campi Ferraris, sotto l'azione di correnti continue, interrotte ed alternate, e di onde hertziane, sono i seguenti:

1.° In corrispondenza di campi Ferraris sufficientemente intensi, sempre si constata una diminuzione del ritardo di magnetizzazione nel cilindro di materiale magnetico: tale diminuzione di isteresi essendo tanto più grande quanto maggiore è l'intensità del campo Ferraris, in cui è collocato il cilindro su cui si sperimenta, e quanto maggiore è l'intensità del campo magnetico secondario generato dalla corrente su cui si sperimenta, ed alla cui azione il cilindro stesso è sottoposto.

2.° In corrispondenza di campi Ferraris di debole intensità, si può avere aumento o diminuzione del ritardo col quale la magnetizzazione del cilindro di acciaio segue la rotazione del campo in cui esso è collocato; e precisamente si ha aumento di isteresi fino a che l'intensità del campo magnetico secondario non ha superato un certo determinato valore, a partire dal quale, e per tutti i valori ad esso superiori, si constata invece diminuzione di isteresi.

3.° Esiste sempre, a parità di tutte le altre condizioni in cui si sperimenta, un valore della intensità del campo Ferraris, in cui è collocato il cilindro sottoposto all'azione della corrente continua interrotta od alternata, o del sistema di onde hertziane, per cui si ha il massimo aumento di isteresi; ed un valore della intensità del campo Ferraris per cui non si ha più nè aumento, nè diminuzione di isteresi nel materiale magnetico sperimentato.

4.° Allorquando si sperimenta con campi Ferraris di debole intensità, esiste sempre — in corrispondenza di una data intensità del campo magnetico rotante e a parità di tutte le altre condizioni in cui si sperimenta — un valore della intensità del campo magnetico secondario per cui si ha il massimo aumento di isteresi; ed un valore della intensità del campo magnetico secondario per cui non si ha più nè aumento, nè diminuzione di isteresi nel materiale magnetico sperimentato.

— dovuta alla variazione della frequenza della corrente, veniva in ogni singolo esperimento opportunamente modificata la resistenza ohmica addizionale inserita nel circuito della spirale S: per modo che in ogni caso l'impedenza del circuito della spirale stessa avesse a risultare assolutamente invariata.

5.° A parità di tutte le altre condizioni in cui si sperimenta, se si ha aumento di isteresi, questo è notevolmente più piccolo nel caso in cui si sperimenta con correnti continue che allorquando il corpo magnetico è sottoposto all'azione di correnti interrotte od alternate; e se, d'altra parte, si ha diminuzione di isteresi, questa è invece notevolmente più grande se si sperimenta con correnti continue di quella che altrimenti si ottiene con correnti interrotte od alternate.

6.° Allorquando sottoponendo il cilindro di materiale magnetico all'azione di una corrente continua, si ha, in certe determinate condizioni, nè aumento, nè diminuzione di isteresi, si ottiene, sperimentando in quelle stesse condizioni con correnti interrotte od alternate, aumento di isteresi.

Viceversa, allorquando sottoponendo il cilindro di materiale magnetico all'azione di una corrente interrotta od alternata, si ha, in certe determinate condizioni, nè aumento, nè diminuzione di isteresi, si ottiene, sperimentando in quelle stesse condizioni con correnti continue, diminuzione di isteresi.

7.° Può ancora accadere che, sperimentando con correnti continue ed avendo diminuzione di isteresi, si abbia invece — sperimentando con correnti interrotte od alternate e mantenendo inalterate tutte le condizioni dell'esperimento — aumento del ritardo di magnetizzazione nel cilindro di materiale magnetico.

8.° L'aumento del ritardo di magnetizzazione è, a parità delle altre condizioni, tanto più grande quanto maggiore è la frequenza della corrente alternata, o quanto maggiore è il numero delle interruzioni al 1" della corrente interrotta su cui si sperimenta.

9.° La diminuzione del ritardo di magnetizzazione è, a parità delle altre condizioni, tanto più grande quanto minore è la frequenza della corrente alternata, o quanto minore è il numero delle interruzioni al 1" della corrente interrotta su cui si sperimenta.

10.° Allorquando sottoponendo il cilindro di materiale magnetico all'azione di una corrente alternata di una data frequenza, od interrotta con un dato numero di interruzioni, si ha, in certe determinate condizioni, nè aumento, nè diminuzione di isteresi, si ottiene, sperimentando in quelle stesse condizioni con correnti alternate di frequenza maggiore od interrotte con maggior numero di interruzioni, aumento di isteresi.

Viceversa, allorquando sottoponendo il cilindro di materiale magnetico all'azione di una corrente alternata di una data frequenza, od interrotta con un dato numero di interruzioni, si ha, in certe determinate condizioni, nè aumento, nè diminuzione di isteresi, si ottiene, sperimentando in quelle stesse condizioni con correnti alternate di frequenza minore od interrotte con minor numero di interruzioni, diminuzione di isteresi.

11.° Può finalmente ancora accadere che, sperimentando con una corrente alternata di una data frequenza od interrotta con un dato numero

di interruzioni, ed avendo diminuzione di isteresi, si abbia invece — sperimentando con correnti alternate di frequenza maggiore od interrotte con maggior numero di interruzioni, e mantenendo inalterate tutte le condizioni dell'esperimento — aumento del ritardo di magnetizzazione nel cilindro di materiale magnetico.

E così può ancora accadere che, sperimentando con una corrente alternata di una data frequenza, od interrotta con un dato numero di interruzioni, ed avendo aumento di isteresi, si abbia invece — sperimentando con correnti alternate di frequenza minore, od interrotte con minor numero di interruzioni, e mantenendo inalterate tutte le condizioni dell'esperimento — diminuzione del ritardo di magnetizzazione nel cilindro di materiale magnetico.

Fisica. — *Relazione fra la costante dielettrica e la densità dell'aria.* Nota del dott. AUGUSTO OCCHIALINI, presentata dal Corrispondente A. BATTELLI.

Fisica terrestre. — *Risultati pireliometrici ottenuti dall'ottobre 1901 al 16 luglio 1902 al R. Osservatorio Geofisico di Modena.* Nota di CIRO CHISTONI, presentata dal Socio P. BLASERNA.

Cristallografia. — *Studio cristallografico di alcune sostanze organiche.* Nota del dott. FRANCESCO RANFALDI, presentata dal Socio G. STRUEVER.

Le precedenti Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Geologia. — *Osservazioni sui sedimenti del Monte Mario anteriori alla formazione del tufo granulare.* Nota dell'ing. ENRICO CLERICI, presentata dal Socio V. CERRUTI.

Nelle sabbie quarzose giallastre di Bravetta, che precedettero la formazione del tufo granulare propriamente detto, trovai uno strato di materiale caoliniforme che mi fornì diatomee ed abbondanti spicule di potamospongie, che già feci conoscere con apposita comunicazione (Boll. Soc. Geol. It., vol. XIX, 1900, pag. 722). Dipoi, pensando che quel materiale poteva avere origine più o meno diretta dall'alterazione e dal disfacimento di una roccia feldspatica, poichè infatti conteneva frammenti di feldspati, mi proposi di ricercare se in altra località i componenti della supposta roccia vi si mostrassero più appariscenti o meglio conservati.

L'esame microscopico di quelle sabbie, per lo studio dei fossili, mi fece constatare la presenza di minerali fino allora neppur accennati che mi invogliarono ad esaminare mineralogicamente molti altri saggi di sabbie e di argille dei dintorni di Roma.

Nella presente Nota riassumo i risultati ottenuti nel doppio genere di ricerche che mi ero proposto; riferendoli in particolar modo al Monte Mario e sue adiacenze. Per esser breve, e per meglio fissare le cose, prendo per base

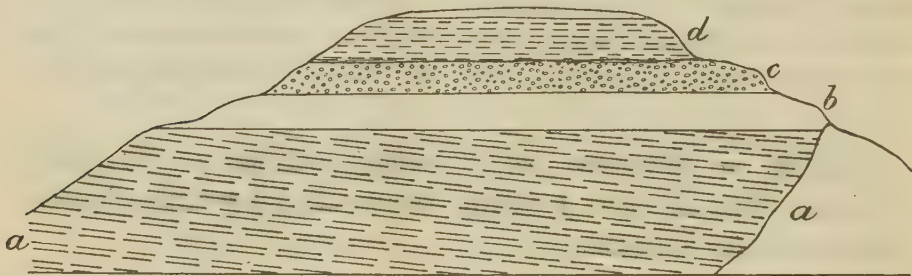


FIG. 1.

tre sezioni rilevate rispettivamente nella valle dell'Inferno, alla Farnesina e nella valle della Rimessola.

Nell'esame delle sabbie ho eliminato la parte calcarea, con acido cloridrico diluito, e la parte sottile, che come è noto non è utilizzabile otticamente, mediante successive lavature e decantazioni. Sul residuo ho operato la separazione meccanica, con liquido di densità poco superiore a quella del berillo, per raccogliere la parte più pesante della quale principalmente mi sono occupato. Qualche volta ho determinato il peso della parte affondata per sapere in quale proporzione i minerali pesanti si trovino nel materiale già decalcificato e preparato per la separazione.

La valle dell'Inferno permette di riconoscere la costituzione del Monte Mario nei suoi fianchi occidentale e meridionale, particolarmente per le numerose cave di argilla da laterizi le quali mostrano altrettante sezioni quasi identiche.

La sezione rappresentata nella fig. 1, diretta presso a poco nord-sud, è visibile nell'ultima cava ora attiva a sinistra risalendo la valle.

La metà inferiore della sezione presenta una serie di strati *a* di diverso spessore e di colore ora bigio azzurrognolo, ora cenerognolo, ora volgente al giallastro, formati alternativamente di argilla, e di argilla sabbiosa o di sabbia appena cementata da un po' d'argilla. Tutti i saggi contengono alquanto calcare. I fossili macroscopici vi sono piuttosto scarsi: per solito non vi si rinviene che qualche gruppo di pteropodi, qualche radiolo di *Cidaris*

remiger Ponzi, qualche *Dentalium elephantinum* Lin. e pezzi di legni. Vi abbondano talora le foraminifere: globigerinidi, cristellarie, nodosarie. Le spicule di spugne vi sono assai scarse ed in frammenti.

Per la separazione meccanica ho preferito prendere campioni da quattro strati sabbiosi: i minerali pesanti vi si trovano in quantità molto diversa:

strato bigio presso il piano della cava — min. pes. 32 per 1000;

strato bigio ad elementi relativamente grossi, a m. 1,50 dal piano della cava — min. pes. 16 per 1000;

grosso strato giallognolo, a due terzi dell'altezza (a destra) di tutta la formazione — min. pes. 17 per 1000;

strato giallognolo ad elementi fini, presso al termine (a destra) della formazione — min. pes. 9,4 per 1000.

Fra i minerali pesanti dei primi due abbonda la *pirite* in masserelle formate da gruppi cristallini che spesso hanno modellato foraminifere: negli altri due vi sono analoghe masserelle e gli stessi modelli di foraminifere ma sono di *limonite* la quale ritengo derivata per epigenesi dalla pirite.

Per gli altri minerali non mi sembra vi siano differenze notevoli fra i quattro saggi.

Alcuni minerali richiamano subito l'attenzione per le marcate proprietà ottiche o perchè si presentano anche in nitidi cristalli. Noto principalmente i seguenti: *zirconio*, abbondante in cristalli prismatici terminati da piramidi ad ambedue le estremità, incolori e leggermente rosei; *rutile*, pure abbondante ma più in frammenti che in cristalli interi; *tormalina*, abbastanza frequente, in prismi rotti alle estremità, oppure terminati da faccie romboedriche ad una estremità e talvolta ad ambedue, debolmente colorata in giallognolo o in verde, prende nella direzione di massimo assorbimento colorazioni intense in toni del bruno, marrone, verde sporco; *granato*, incoloro o roseo in rombododecaedri, talvolta modificati da faccie icositetraedriche.

Meno frequenti sono: *magnetite*, *staurolite*, *attinolit*, *cianite*, *epidoto*, *glaucofane* con marcato pleocroismo dall'azzurro al violaceo.

Abbondanti sono le miche, *muscovite* e *biotite*, in parte cloritizzata, in lamine a contorno sempre irregolare e stracciato. La biotite ha colore dal giallo-verdastro, al giallo-bruno, angolo di assi ottici variabile.

In questa cava gli strati sono inclinati ed attraversati qua e là da faglie, di cui non ho tenuto conto nella figura, con spostamenti anche di qualche decimetro; ma in altre cave gli spostamenti e la variazione d'inclinazione sono più evidenti.

La superficie terminale di questa formazione, nota colla denominazione di *argille vaticane*, taglia dappertutto nettamente ed obliquamente la serie degli strati e quindi non è dubbia la discontinuità o sconcordanza colla formazione sopraggiacente costituita principalmente da sabbie.

Il banco *b* che ricopre immediatamente le argille è di sabbia giallognola, quasi sciolta, ad elementi non troppo fini. Comincia con uno straterello, forse appena di un decimetro, tutto inzuppato e pieno di conchiglie frammentate e disfatte che fanno supporre quivi la presenza di un lembo assai assottigliato delle sabbie gialle ricche di fossili del noto giacimento esistente nella stessa valle 2 km. più a monte, a sinistra del fosso (min. pes. 15 per 1000). Segue poi una striscia, di un mezzo metro circa, ricca di ciottoli calcarei e silicei.

Dalla separazione meccanica ho ricavato 19 per 1000 di minerali pesanti, con cristalli più grossi di quelli trovati nei precedenti saggi, quindi alcuni sono più appariscenti, tale è il caso per il zircone e la magnetite. La pirite e i modelli di fossili vi mancano, gli altri minerali delle argille vi sono tutti rappresentati. Alcune lamine di biotite mostrano parte dell'orlo esagonale. Certamente poco frequenti, sono notevoli cristalliti e qualche intero cristallo verdognolo ad estinzione sempre retta di *iperstene*.

Su questo banco, con sfumature di passaggio, riposa altro banco *c* di piccole ghiaie di calcari e di piromache con molta sabbia, qua e là tenacemente cementate in lastroni, racchiudenti vestigia di conchiglie. Da questi lastroni ho tolto di fra la ghiaia alcuni ciottoli ben rotondati di un centimetro a due di massimo diametro, che non ho tardato a riconoscere essere costituiti dallo stesso *materiale lavico bigio a feldspati macroscopici* che già, per primo, rinvenni nelle ghiaie di Decima (Boll. Soc. Geol. It., vol. XVI, 1897, pag. 275). I minerali pesanti di queste sabbie sono abbastanza grossi, ma i cristalli interi non vi sono così frequenti come nelle sabbie precedenti.

Su queste ghiaie sta un altro banco *d* di sabbia quarzosa omogenea di bel colore giallo-chiaro, priva affatto di calcare ed analoga alle ricordate sabbie di Bravetta. Oltre ai minerali più volte nominati in dose del 12 per 1000, che in frammenti o in cristalli presentano spigoli un po' arrotondati, noto l'*orneblenda basaltica* di colore rosso-bruno e marcatisimo pleocroismo.

La fig. 2 è ricavata da una mia fotografia del 1889, presa in una grande cava di argilla ora abbandonata, nella valle della Farnesina, ed offre un'altra interessante sezione del M. Mario diretta presso a poco est-ovest.

La parte inferiore *a*, che attualmente è nascosta da frane, mostrava la continuazione delle argille a pteropodi del Vaticano e della valle dell'Inferno, come era facile persuadersi visitando successivamente le varie cave di queste località, la fornace S. Lazzaro, la strada Trionfale presso il 2° km., la grande cava Du Houx ed altre minori. Vi si rimarcava una bella faglia per la quale gli strati da una parte apparivano, nella sezione, quasi orizzontali, e nell'altra molto inclinati verso il monte della Farnesina. Ho esaminato i minerali pesanti su campioni raccolti in questa cava quando era attiva, nella cava Du Houx e nell'affioramento ancora visibile alla base del monte della Farnesina. Per essi non avrei che a ripetere quanto ho riferito per i corrispondenti campioni della valle dell'Inferno.

Stratificata orizzontalmente e perciò in discordanza, segue un'argilla bigia *b*, ricca di glauconite, con molti fossili. Fra i minerali pesanti, in dose del 40 per 1000, il più abbondante è la *pirite* in nitidi e relativamente grossi cristalli ottaedrici isolati o raggruppati; fra gli altri i più frequenti sono al solito *zircone*, *tormalina*.

In concordanza segue un banco di un paio di metri di sabbia grigia azzurrognola *c* qua e là tenacemente cementata, gremita di fossili, che insieme a quelli pure abbondanti alla parte inferiore delle susseguenti sabbie gialle

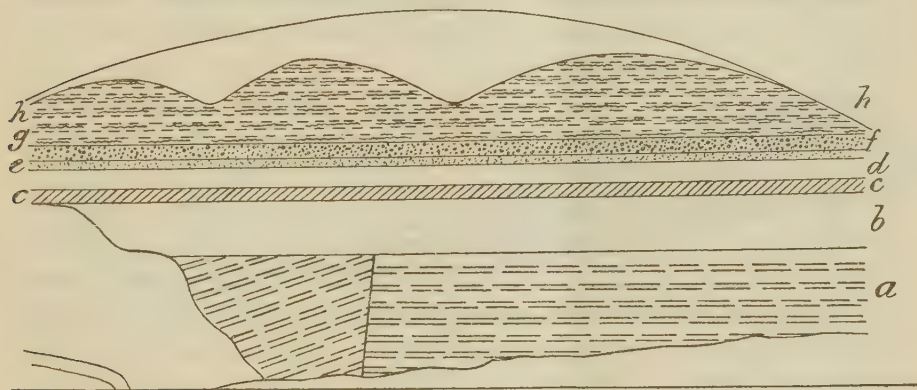


FIG. 2.

costituiscono il giacimento classico della Farnesina. Fra i minerali pesanti la *pirite*, in cristalli e gruppi più piccoli dei precedenti, ed in modelli di fossili, prevale tanto che è utile sbarazzarsene con acido nitrico per osservare comodamente gli altri: *zircone*, *rutilo*, *tormalina*, *cianite*, *granato*, *glaucofane*, *staurolite*, ecc.

Il banco di sabbia gialla fossilifera *d* contiene molta parte ocracea e molti modelli di fossili limonitizzati: gli altri minerali sono un po' più grossi ed appariscenti di quelli delle sabbie grigie. Alla parte superiore si impoverisce tanto di fossili macroscopici, che si può anche notare sulla sezione uno strato di sabbia gialla sterile *e* il quale è susseguito da altro *f*, pure sterile, ma intensamente colorato in giallo. In questo la limonite è molto abbondante: i minerali pesanti, in dose del 13 per 1000, sono più piccoli di quelli della sabbia fossilifera. La biotite mostra talvolta parte del suo contorno esagonale.

La rimanente parte della sezione presenta un grosso banco *h* di sabbie di color giallo, ora più ora meno marcato, con netta stratificazione orizzontale, ora quasi sciolte, ora cementate in numerose croste di forme variate e bizzarre che si dissero priapoliti, lance, pugnali, ora con qualche ghiaiuza, ora con molte ostriche e poche altre specie, fra loro cementate in strati di pic-

colo spessore. Sopra uno di tali strati di ostriche, il secondo in *g*, la sabbia giallo-chiara è cosparsa di abbondanti macchie nere che la farebbero somigliare alle sabbie augitiche di altre località. Le macchie però sono velature di ossidi di ferro e di manganese. Minerali pesanti 17 per 1000. Fra i due ultimi strati di ostriche, la sabbia con qualche fossile spatizzato ha 18 per 1000 di minerali pesanti. Quella un po' argillosa dell'ultimo strato di ostriche ha 17 per 1000, con molti modelli di fossili limonitizzati. Nella sabbia della parte più alta della sezione abbonda la biotite: min. pes. 30 per 1000.

La sezione rappresentata dalla fig. 3 è, nelle sue parti, visibile lungo il fosso della Rimessola e delle colline alla sua sinistra, quindi schematica.

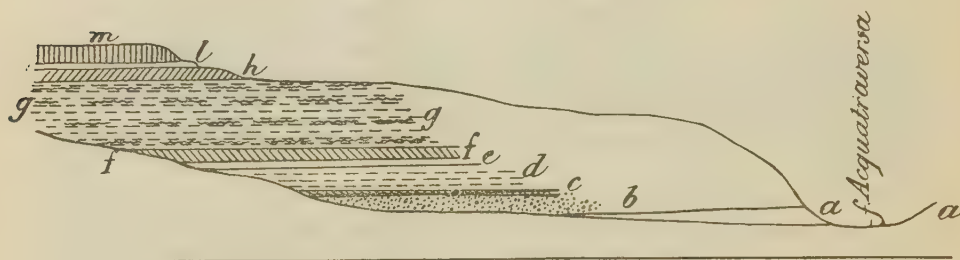


FIG. 3.

Gli strati più bassi sono costituiti dalle sabbie gialle fossilifere, un po' ghiaiose *a*, del noto giacimento di Acquatraversa. I minerali pesanti sono un po' grossi, e fra i più appariscenti: *granato*, *tormalina*, *zircone*, *rutilo*, *glaucofane*.

Seguono sabbie giallognole grossolane *b*, senza fossili macroscopici, a 3 per 1000 di minerali pesanti, con *glaucofane*, *tormalina*, *stauroilite*, *cianite*, ecc., che sostengono uno straterello *c* di sabbia marrone-scuro quasi nero, a 18 per 1000 di minerali pesanti, con granuli un po' sporcati.

Sullo strato bruno ritornano sabbie gialle *d*, nelle quali ho raccolto un bel dente di *Carcharodon Rondeleti* M. e H., qua e là cementate nelle ricordate forme bizzarre e in lastroni e contengono pure ghiaiuze.

Viene di poi un'argilla bigia *e* con *Cardium Lamarcki* Reeve, con straterelli ricchissimi di *Bittium reticulatum* Da Costa, var. *paludosa* B. D. D. di *Neritina*, *Nematurella* e *Melanopsis*.

Segue l'argilla sabbiosa azzurrognola *f* dei cui fossili detti ragguaglio in una Nota: *La formazione salmastra nei dintorni di Roma*, pubblicata in questi Rendiconti, vol. II, 1° sem., 1893. I minerali pesanti sono 11,2 per 1000. Vi abbonda la *pirite* in pallottoline a superficie cristallina ed in altri modelli di fossili; vi abbondano pure la *biotite* e la *muscovite*. Gli altri minerali hanno dimensioni minori di quelli degli strati precedenti.

Su questa argilla giace una potente formazione di sabbie gialle *g*, ora ghiaiose, ora sciolte, ora cementate, ora sterili di fossili macroscopici, ora abbastanza ricche di fossili dei quali però fu disciolto il guscio lasciando una impronta ocracea, ora inframmezzate di straterelli argillosi mostranti qua e là impronte ocracee di foglie. Stratificazioni tutte che si possono seguire ed annotare risalendo un angusto solco pel quale scolano le acque piovane, di contro al fontanile della Rimessola. Da uno strato cementato ricco di fossili a guscio disciolto ebbi 15 per 1000 di minerali pesanti.

Su questa formazione sabbiosa presso la sommità della collina, detta pure colle S. Agata, rinvenni il desiderato materiale caolinico *h* la cui potenza non è ora esattamente misurabile, maggiore però di due metri. Ha colore bianco sporco; è a grana non molto fina, sparso di abbondanti punteggiature scure luccicanti di biotite, e, liberato con lavature dalla parte caolinizzata, lascia molto feldspato, parte sanidino, parte plagioclasio, e poco quarzo.

La parte pesante è costituita da: *magnetite* in nitidi cristalli d'abito ottaedrico o rombododecaedrico, alquanto resistente all'acido cloridrico bolente, perciò in parte titanifera; *zircon*e, abbondante in freschissimi cristalli interi allungati, pieni di cavità; *orneblenda* basaltica in cristalli nitidi e lucenti e frammenti di colore rosso-bruno con pleocroismo marcatissimo fino a divenire completamente nero e da non potersi determinare esattamente l'angolo d'estinzione; *biotite* in lamine a netto contorno esagonale, intensamente colorata in giallo-bruno; *iperstene* molto raro. Sul materiale caolinico si ritrovano le sabbie gialle *l*, prive di calcare, del tipo Bravetta, che hanno la potenza di poco più d'un metro, le quali sono qui ricoperte dal tufo granulare *m* colle sue variazioni argillose biancastre, cogli arricchimenti di pomici chiari, ecc. ecc. Queste ultime sabbie hanno 5 per 1000 di minerali pesanti, con abbondanti cristalli di *zircon*e, alcuni freschissimi altri come quelli degli strati più profondi; con *magnetite*, *tormalina*, *staurolite*, *orneblenda*, *iperstene*, ecc.

Tutti i materiali di color bigio od azzurrognolo, siano argillosi oppure sabbiosi, contengono dunque pirite in abbondanza mentre ne sono privi tutti quelli di colore giallo; perciò può ritenersi che alla colorazione gialla contribuisca pure la limonitizzazione della pirite.

Altra conclusione può scaturire dall'esame mineralogico delle sabbie. Mi aspettavo, secondo le asserzioni di alcuni autori, di vedervi ovunque abbondanti cristalli di augite; invece si è constatato che i minerali pesanti stanno in dose dal 40 al 3 per 1000 rispetto a materiale già privato del limo e del calcare quando ve n'era, perciò i detti minerali, almeno nelle dimensioni che ne permettono la determinazione, stanno in quelle sabbie ed argille in proporzione molto minore. Forse appena un granulo di minerale pesante si trova su mille granuli delle sabbie. Si è visto pure quali siano i minerali prevalenti, quindi quelle asserzioni non sono tutte attendibili e le pongo in-

sieme alle asserzioni di Schilling, Riccomanni e Benigni⁽¹⁾ che dissero di aver trovato, dando i nomi delle specie, fossili marini nelle ceneri vulcaniche del Monte Mario.

Assodata l'esistenza, fra le ultime sabbie, di un particolare tufo che potrei dire trachitico o trachi-andesitico, escludendo assolutamente l'origine da disfaccimento di materiali granitici, se ne dovrebbe ricercare la provenienza. Per ora non intendo precisarla, ma solo procedere a confronti.

L'aspetto di questo tufo in alcuni punti mi rammentò il *peperino* biancastro, quasi polverulento, visibile in un grande taglio sulla strada a Soriano. Colla separazione meccanica ne ho estratto biotite in lamine esagonali giallo-brune che passano al nero non appena ne aumenti lo spessore, abbondanti cristalli di zircone, iperstene, magnetite e orneblenda. Tolta l'abbondanza dell'iperstene, col confronto dei preparati, rilevasi grande analogia.

Al Monte Arsiccio, presso Bracciano, in vicinanza di una cava di argilla, ho raccolto una trachite bigio-chiara che si lascia triturare facilmente e dalla quale ho ottenuto analogamente biotite, zircone, orneblenda, magnetite, iperstene.

Con queste osservazioni si potrebbe pensare che quel tufo sia originato dall'accumularsi di detriti di trachiti o di particolari tufi venuti da lontano che di poi si sono alterati o caolinizzati.

Ma si presenta anche altra ipotesi, cioè di materiali lanciati in aria da eruzioni e quindi caduti in posto o trascinati da non molto lontano.

A Ponte Sodo, presso Viterbo, la formazione del *peperino* comincia con un banco di *pomici* grandi e piccole, bianche, che furono certamente proiettate in aria. E triturandole, il che per l'effetto finale si avvicina alla caolinizzazione, ne ho ricavato cristalli di magnetite, zircone, biotite, orneblenda, iperstene.

(1) *Rerum naturalium Montis Marii prope Urbem descriptio*. Romae 1782. In questa opera si dice che materie eruttate in tempi antichissimi da qualche vulcano costituiscono base e fondo del M. Mario, che tali materie sono soprattutto pomici e ceneri. Le ceneri conservano il loro colore, ma reso alquanto più scuro e si trovano anche sopra i fossili che ne sono protetti come da una crosta, soprattutto se si scavano laddove si trovano aggregate e regolarmente disposte a strati. Per la formazione del M. Mario si stabiliscono tre epoche. La prima è vulcanica. Non vi sono documenti che testimonino quei luoghi avere arso, nè si può affermare se sul posto abbia esistito qualche cratere, perchè il monte non ne ha la forma: si può dedurre che le citate materie siano, state lanciate da altrove. La seconda deve essere alle acque. Le conchiglie, più che della presenza del mare, sono reliquie di un cataclisma universale. Ritiratesi le acque e la terra alleggerita dal peso di quelle, l'aria interna cominciò a rarefarsi e dal movimento di un fuoco centrale cominciò a generarsi una violenta fermentazione, alla quale presero parte le materie vulcaniche, delle quali era composto il monte prima del diluvio, e le produzioni marine esposte all'aria ed ai raggi del sole. Di qui un certo risveglio del vulcano già forse estinto, di qui la produzione di quelle ceneri che si vedono nei testacei; ecco la terza epoca.

Grande interesse offrono anche i ciottoli lavici contenuti in quelle ghiaie a sabbia giallastra che una volta, seguendo il Ponzi, si dicevano *ghiaie senza elementi vulcanici* per distinguerle dalle altre ghiaie assai più recenti, del tipo detto di Ponte Molle, nella cui sabbia, sovrabbonda l'augite in cristalli macroscopici e la leucite spesso ancora vetrosa. Detti ciottoli, oltre che dalle ghiaie della valle dell'Inferno, ho tolto dalle ghiaie di egual tipo che si cavano di contro alla stazione di Trastevere (min. pes. 15 per 1000 nella sabbia interposta), a vigna Negroni e in vari luoghi presso Campo di Merlo.

Dalla triturazione, meglio che dall'esame in lamina sottile, dei ciottolini di materiale lavico già menzionato e da me estratti dalle ghiaie della valle dell'Inferno ho ottenuto magnetite⁽¹⁾, biotite, cristalli di zircone e di apatite. Da quelli di Campo di Merlo, avendo potuto operare su maggior quantità, ho ottenuto oltre ai detti minerali anche l'augite. Perciò vi è qualche differenza colla trachite di Monte Arsiccio e maggiore somiglianza con quella di Monte Cucco presso Cervetri ove ho riscontrato tutti quei minerali compresa l'augite.

Quindi il materiale lavico ed il tufo possono essere collegati ad un periodo, o periodi poco discosti cronologicamente, di attività vulcanica anteriore senza alcun dubbio alle eruzioni Laziali, Sabatine e Vicane, ma prossimo o contemporaneo a quello delle eruzioni Cimine, del gruppo di San Vito presso Bracciano, dei monti di Cervetri.

E poichè lave trachitiche o trachi-andesitiche poterono essere ridotte a ciottoli ed essere disseminate in località diverse⁽²⁾, è necessario ammettere che le lave stesse erano su terra emersa ed in denudazione mentre alcune delle accennate località erano spiaggia marina con lagune e ristagni d'acqua dolce. L'ipotesi che alla formazione del tufo bianco o caolinico possano aver contribuito eruzioni sottomarine è da escludersi quando si rammenti che a Bravetta quel tufo contiene diatomee e potamospoglie.

(1) Fra i cristalli e granuli neri ricavati da tutti i materiali lavici e tufacei ora menzionati nonchè dal tufo bianco *h* della Rimessola, ve ne sono alcuni che, al microscopio, sembrano indifferenti all'ago magnetizzato e potrebbero essere di ilmenite. Infatti ho ottenuto marcatissima la reazione del titanio col prodotto della fusione con bisolfato potassico.

(2) Il colonnello Verri ha recentemente comunicato alla Società Geologica Italiana il rinvenimento di tali ciottoli in molte ghiaie della regione a nord di Roma. Io li ho trovati anche nelle ghiaie sottostanti ai tufi pomicei di Cervetri e qui certamente provengono dalle trachiti di quei monti.

Chimica. — *Sopra la preparazione di composti del carbonio con due doppi legami consecutivi*. Nota di ARRIGO MAZZUCHELLI, presentata dal Socio E. PATERNO.

Zoologia. — *Un Gefireo pelagico: Pelagosphaera Aloysii n. gen. n. sp.* Nota di PIO MINGAZZINI, presentata dal Socio F. TODARO.

Le Note precedenti saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Fisiopatologia chirurgica. — *Sull'evoluzione della sensibilità nelle cicatrici*. Nota di GUIDO LERDA, presentata dal Socio A. MOSO.

I processi di riparazione alle perdite di sostanza dei tessuti superficiali del corpo sono stati finora, dalla maggioranza degli autori, studiati quasi sempre da un punto di vista strettamente istologico; ben pochi presero in considerazione il lato fisiopatologico della questione; pochissimi, e per lo più solo incidentalmente, studiarono, nelle riparazioni dei tessuti di rivestimento, il comportarsi degli organi di senso, della sensibilità.

Ed anche fra questi pochissimi, l'accordo è ben lungi dall'esser completo. Così ad esempio, noi potremo sentire dal Mauclaire ⁽¹⁾ che « le cicatrici, quando sono recenti, conservano la loro sensibilità. È questo un fenomeno dei più curiosi, perchè prova che nuovi filuzzi nervosi si sono necessariamente riprodotti, ed hanno invaso questo tessuto cicatriziale. È facile constatare questo fatto: noi abbiamo osservato questa integrità della sensibilità al tatto, alla pressione ed al calore, su molte cicatrici amplissime, consecutive a scottature profonde ed estese. In alcuni casi v'ha però un leggero ritardo nella percezione delle sensazioni come abbiamo potuto riscontrare su cicatrici di ulcere varicose, ma qui la sensibilità di tutto il membro è alterata, e tale caso non si può paragonare alle cicatrici consecutive a ferite o a scottature ».

Ecco invece quanto scrive il Durante ⁽²⁾: « Nella cicatrizzazione per 2^a intenzione . . . i vasi e i nervi nei loro monconi imbrigliati sulla cica-

⁽¹⁾ Mauclaire, in Richet, *Dictionnaire de Physiologie*, Paris, Alcan, 1898, art. Cicatrisation.

⁽²⁾ Durante, *Trattato di Patologia e Terapia chirurgica*, Roma, Soc. D. Alighieri, V. I, pag. 176.

trice si atrofizzano e degenerano. La degenerazione del moncone periferico si estende a tutte le diramazioni ».

D'altra parte il Minervini ⁽¹⁾ in un recente studio sulle cicatrici, afferma aver trovato in esse qualche fibra mielinica ed altri filamenti nervosi sottilissimi, mai terminazioni nervose; e da osservazioni cliniche, di cui riporta due casi, trovò che « la sensibilità è in realtà notevolmente ridotta, e più di tutte la tattile ».

Hillairot et Gaucher ⁽²⁾ dicono che « se una cicatrice riunisce due parti lontane, la sensazione delle punte di Weber è sempre sentita separatamente, se le punte sono l'una da un lato, l'altra dall'altro della cicatrice ».

Agliardi ⁽³⁾ avendo studiato due cicatrici, una piccola datante da trent'anni, l'altra più ampia datante da due mesi, ottenuta mediante innesti alla Thiersch, osservò la mancanza della sensibilità al tatto ed al freddo, mentre per stimoli caldi rimaneva una sensazione diffusa di calore, fenomeno che, secondo l'autore, trova probabilmente la sua spiegazione nella conduttibilità dei tessuti.

Lussana ⁽⁴⁾ riferisce che il Weber aveva intrapreso lo studio di una vasta piaga, proponendosi di seguire in essa l'evoluzione della sensibilità, proposito che non potè realizzare, limitandosi a concludere che: i muscoli sentono meno che la pelle; il caldo ed il freddo non vi sono sentiti; le temperature elevate danno qualche dolore; la sensazione di pressione non si può dire se sia riferibile ai muscoli, perchè si ripercuote anche sui punti d'appoggio del membro. Dopo ciò Lussana soggiunge che, dall'osservazione di una larga cicatrice da scottatura, sul lato esterno della gamba, datante da 35 anni, crede poter concludere che: dove manca il corpo papillare non ci sono cerchi tattili; il senso di semplice contatto non può aver luogo senza sensazione tattile distinta; il dolore può esser sentito dagli altri tessuti anche più distintamente che dalla pelle; il senso termico è meglio sentito dalla cute; la distruzione della pelle non influisce sul senso muscolare. Le conclusioni di Lussana sono però incriminabili dal fatto, riferito dall'autore, che al di sotto della cicatrice v'era una larga zona di cute normale in cui la sensibilità era lesa, ciò che fa supporre una lesione dei rami nervosi destinati a quella regione.

Con questi crediamo aver citato i principali e più attendibili autori che si occuparono della sensibilità dei tessuti di riparazione, argomento di cui

⁽¹⁾ Minervini, *Sulla evoluzione delle cicatrici*, Boll. della R. Accad. Medica di Genova 1903, A. XVIII, n° 2.

⁽²⁾ Hillairot et Gaucher, *Traité des maladies de la peau*, 1881.

⁽³⁾ Agliardi, *Ricerche intorno al senso della temperatura*, Giornale della R. Accad. di Med. di Torino, 1899, n° 5.

⁽⁴⁾ Lussana, *De la sensibilité des parties privées de la peau*, Archives italiennes de Biol. 1883, T. IV, pag. 286.

non è fatto cenno, nè negli antichi e classici lavori di Haller *Sulla natura sensibile ed irritabile* ⁽¹⁾ che suscitarono allora tanta copia di dispute e di esperienze ⁽²⁾, nè nel recente libro del Richet *Recherches sur la sensibilité* ⁽³⁾.

* * *

Convinto dell'importanza dell'indagine psico-fisiologica in questo campo in cui, attraverso a gravi difficoltà tecniche, l'istologia non può dare che risultati incompleti, su proposta del prof. Kiesow, direttore della Sezione di Psicologia sperimentale dell'Istituto fisiologico di Torino — cui mi è caro porgere gli atti della mia riconoscenza — risolsi di esaminare da questo punto di vista quante più cicatrici mi fosse possibile.

Nel riparto chirurgico del prof. L. Isnardi — al quale rendo vive grazie per avermi concesso lo studio dei casi — ho avuto, in circa due anni, occasione di osservare un buon numero di esiti dei più svariati casi di traumatologia: mi sono intrattenuto particolarmente su quelli in cui ero ben sicuro che non vi fossero lesioni dei tronchi nervosi destinati alla regione della soluzione di continuo, e scelsi quelle cicatrici che avevano una tale estensione da poter essere più facilmente studiate, a partire da quelle di 2-3 cm. di lato, fino ad alcune dell'ampiezza di 1-2 decimetri quadrati. Pur senza uscire da un campo strettamente clinico, ho cercato di usare metodi di ricerca, per quanto mi fosse possibile, conformi ai precetti della moderna psicologia sperimentale.

Per la ricerca della sensibilità tattile feci uso dell'estesimetro di von Frey ⁽⁴⁾.

Specie per le ampie cicatrici usai pure l'estesimetro a molla di Kiesow ⁽⁵⁾ di cui avevo due esemplari di potenza diversa, muniti di un'opportuna graduazione e di un disco stimolatore di 1 mm. di raggio. Così, sia per l'estesimetro di von Frey, sia per l'apparecchio di Kiesow, io ero sempre in grado di determinare con notevole esattezza l'intensità dello stimolo adoperato.

Quanto alla *sensibilità dolorifica*, bastando a me di accertarne o meno la presenza, mi servivo di aghi finissimi ed acuminati.

Per la *sensibilità termica* mi servivo di piccole provette ripiene di acqua e tenute in recipiente pieno d'acqua a temperatura nota (0°-55°), oppure di stili metallici raffreddati o riscaldati.

(1) Haller, due dissertazioni inviate alla R. Società delle Scienze di Gottinga nel 1752 e 1755.

(2) V. ad es. Fabri G. B., *Sulla insensività ed irritabilità*; Halleriana, opuscoli di vari autori (tra cui i succitati di Haller, altri di Zimmermann, Castell ecc.). In tre Vol., MDCCLVII.

(3) Richet. *Recherches expériment. et cliniques sur la sensibilité*, Paris, Masson, 1877.

(4) M. von Frey, *Leipzigiger Abhandl.* Bd. XXIII, III, 1896.

(5) Kiesow, *Zeitschr. für Psychol. u. Physiol. der Sinnesorgane*, XXXV, pag. 14.

Avevo cura di cercare che la durata dello stimolo fosse press'a poco sempre la stessa. Come termine di paragone della sensibilità prendevo le parti circostanti alla cicatrice e le regioni simmetriche. Inoltre, per eliminare ogni dato suggestivo, bendavo gli occhi del soggetto da esaminare, e ripetevo più volte ogni saggio.

Durante le mie ricerche ho avuto agio di esaminare parecchie volte tessuti cruenti e ferite granuleggianti, e potei di leggieri convincermi che le granulazioni delle ferite sono perfettamente insensibili a qualsiasi stimolo, cosa del resto già nota (v. per es. Marchand, op. cit., pag. 237). Le pressioni considerevoli che possono determinare una sensazione, la determinano senza dubbio perchè agiscono sui tessuti sottostanti. A questo proposito, ho potuto notare che tale pressione, necessaria a determinare una sensazione, varia non solo a seconda della qualità del tessuto sottostante, ma anche a seconda della parte dove sta la ferita. Così il valore di soglia è assai minore per le piaghe corrispondenti ad un muscolo, che per quelle corrispondenti ad un osso; ma i risultati ottenuti non possono essere paragonati se non sono stati ricavati da regioni analoghe, perchè per queste pressioni notevoli, a seconda delle regioni, alla sensibilità tattile può venire ad aggiungersi l'articolare delle giunture più vicine.

La cute dei bordi delle ferite mi apparve talora stupefatta, talora iperestesica, probabilmente in rapporto alle lesioni degli ultimi filuzzi nervosi cutanei, o all'intensità della reazione infiammatoria.

Da questa cute, in prosieguo di tempo, ha origine il sottile orlo epiteliale che si avvanza verso il centro della ferita. Pur seguendo il cammino dell'epitelio, le terminazioni sensitive non si avanzano con eguale rapidità, per modo che, nel periodo di evoluzione delle cicatrici, si può ordinariamente notare un orlo epiteliale centrale, talora di parecchi millimetri, insensibile o quasi, mentre perifericamente la sensibilità esiste e può anch'essere discretamente evoluta: ciò è tanto più evidente quanto più rapido è stato il processo di riparazione. Notevole inoltre è il fatto che la sensibilità dolorifica e, più ancora, la termica, non si estendono, per solito, fino al limite a cui si può constatare un discreto grado di sensibilità tattile (valori di 3-4 g/mm).

Nelle frequenti occasioni di innesti dermoepidermici alla Thiersch ho avuto spesso occasione di osservare i postumi di estese lesioni degli strati superficiali della cute, nei luoghi da cui si erano esportati i lembi dermoepidermici da innestare, e vidi che di solito non si hanno lesioni importanti della sensibilità, che in breve si presenta normale, come normale ritorna la costituzione morfologica della regione: lo stesso potei constatare in alcune scottature di primo grado ed in alcune abrasioni traumatiche.

Passando ora alle cicatrici propriamente dette, senza rigenerazione dei bulbi piliferi e delle ghiandole, potei studiarne diciotto, prodotte da varie cause — scottature di 2° e 3° grado, traumi, flemmoni, ecc. — tutte inte-

ressanti per lo meno la cute e parte del connettivo sottocutaneo, e datanti da un periodo di tempo variabile tra un minimo di pochi giorni ed un massimo di 43 anni.

In linea generale ho potuto convincermi che la sensibilità si ristabilisce progressivamente, ma lentamente dai bordi della cicatrice; solo in casi eccezionali ho potuto osservare aree sensibili circondate da una zona insensibile, isolate od unite all'orlo della cicatrice da un istmo sensibile. La soglia di sensibilità tattile va di regola crescendo dai bordi verso la parte centrale, ove raggiunge spesso valori molto alti.

È importante notare che le varie specie di sensibilità non procedono quasi mai di pari passo, ma che assai spesso si può constatare che la sensazione del dolore segue, ad una distanza che può anche essere di parecchi millimetri, quella di un valore di tensione di 3-4 g/mm. Meno costantemente mi è stato dato di notare una differenza sicura tra l'estensione del campo di sensibilità dolorifica e quella di sensibilità termica: però, dal complesso delle osservazioni, risulta che il campo di termooanestesia è spesso più ampio di quello di analgesia. In qualche caso poi, riscontrai delle zone in cui il calore era percepito a preferenza del freddo, non solo, ma uno stimolo tattile o frigorifero poteva dare l'impressione di calore.

Se si pensi ai casi di dissociazione corticale della sensibilità che vennero descritti in varie malattie del sistema nervoso centrale, ed a quelli di dissociazione della sensibilità da lesione di tronchi nervosi periferici — di cui vennero descritti vari casi da Nothnagel, Berger, Ziehl, Pick, Cavazzani ⁽¹⁾, Manca e Ferrari ⁽²⁾ — si vedrà che l'osservazione della dissociazione della sensibilità nei processi di riparazione delle ferite — che, finora, non venne fatta da altri che dallo Stransky ⁽³⁾ riguardo agli innesti cutanei alla Krause — viene a stabilire una terza categoria di dissociazioni della sensibilità, dissociazioni dovute a lesioni delle terminazioni nervose periferiche, o degli ultimi tratti di fibrille nervose che a queste si riferiscono; cosa non priva di interesse, specie per le illazioni che ne deriverebbero in rapporto alle specificità delle terminazioni nervose tattili, dolorifiche e termiche. Debbo però notare che, se talora la cosa mi si mostrò con una evidenza tale da farmi rimpiangere di non poter esportare qualche pezzetto dei tessuti osservati per tentare di individualizzare istologicamente le terminazioni nervose specifiche, non sempre la cosa mi apparve colla medesima evidenza. Così, in qualche caso, la sensibilità dolorifica mi parve più sviluppata della tattile, in qualche altro la sensibilità termica, specie al calore,

(1) Cavazzani, Giorn. della R. Accad. di Med. di Torino, 1893, pag. 110. *Sul differenziamento degli organi della sensibilità termica da quelli del senso di pressione.*

(2) Ferrari, *Alterazione della sensibilità tattile e termica, in seguito a lesione d'un ramo volare del mediano*, Rivista Sper. di Freniatria, 1900, pag. 35.

(3) Marchand, op. cit. pag. 420.

pareva sopravanzasse la dolorifica e la tattile, oppure tutte mi parvero egualmente sviluppate.

Riguardo alla rapidità con cui la sensibilità si ristabilisce, essa varia a seconda della località e della gravità della lesione, non solo, ma anche a seconda dell'aderenza della cicatrice ai tessuti circostanti. Tutto induce a credere che lo stimolo funzionale e la vitalità dei tessuti (irrazione sanguigna, ecc.), abbiano sulla rigenerazione delle terminazioni sensoriali un'influenza notevolissima.

Così potei osservare un ritorno abbastanza rapido della sensibilità (2 mesi circa) in cicatrici della cute delle mani di estensione notevole (5-6 cm. di lato), mentre in altre parti del corpo (tronco, coscie, ecc.) in un ugual lasso di tempo la sensibilità tattile (3-4 g/mm) non si estendè per solito oltre 1-1,5 cm. dai bordi della cicatrice.

In due cicatrici da osteomielite della tibia, aderentissime all'osso sottostante, anche dopo 5-6 mesi permaneva una perfetta insensibilità di tutto l'ambito cicatriziale, salvo un esilissimo bordo di 2-3 mm.; in esse, oltre a completa anestesia termica e dolorifica, ed a mancanza di reazione vasale, la sensibilità tattile era così torpida che non solo non si otteneva una percezione stando nei limiti di 4-5 g/mm attribuibili alle terminazioni cutanee, ma anche pressioni considerevolissime passavano inosservate. È bene notare che una di queste cicatrici, dopo qualche mese, si ulcerò in gran parte, unicamente per cause distrofiche.

Anche il grado della sensibilità va progressivamente evolvendosi, come ebbi ad osservare direttamente su alcune cicatrici che esaminai ripetutamente a distanza di qualche mese, e come d'altronde potevo indurre dalla differenza di sensibilità fra le cicatrici antiche e le recenti. Infatti, in parecchi casi di esami ripetuti sulla medesima cicatrice, ho potuto notare che, mentre ad es. la parte centrale in un primo esame aveva un valore di soglia di 4-6 gr/mm, dopo 5-6 mesi la stessa parte poteva assumere una soglia di 3-3,5 g/mm. Ciò deve evidentemente mettersi in rapporto col moltiplicarsi delle terminazioni nervose nel tessuto cicatriziale; e a questo progressivo moltiplicarsi si deve anche attribuire la scomparsa di quel ritardo nella percezione delle varie impressioni specifiche, che è comune nelle cicatrici recenti.

Ad ogni modo, un ritorno completo della sensibilità non osservai che a capo di un periodo di tempo relativamente assai lungo: in una cicatrice all'avambraccio di circa 5 per 3 cm. di lato, dopo quindici mesi ho trovato, nei tessuti sani circostanti una soglia tattile di circa 2 g/mm, sui bordi della cicatrice 2,60-2,90 g/mm con sensibilità termica e dolorifica, alla parte centrale da 4 a 4,50 g/mm con anestesia termica e dolorifica. In un'altra cicatrice di 4 anni, mentre la pelle circostante era sensibile ad uno stimolo di 1,60 g/mm, gli orli della cicatrice ne percepivano uno variabile tra 2,20 e 2,50, il centro da 3 a 4 g/mm; salvo qualche piccola area centrale dubbia,

la sensibilità dolorifica e termica erano presenti, sebbene alquanto ottuse. In due altre cicatrici amplissime del tronco, datanti dalla prima infanzia, l'una di nove, l'altra di quarantatrè anni, dovute entrambe a scottature presumibilmente di 3° grado, perchè guarite l'una in tre mesi, l'altra in otto, ho potuto riscontrare un ristabilimento perfetto, o quasi, delle varie sensibilità.

*
* *

Dal complesso delle mie osservazioni risulterebbe insomma che:

- 1° Il tessuto di granulazione è insensibile a qualsiasi stimolo.
- 2° Le abrasioni cutanee ledono poco considerevolmente le sensibilità specifiche che in brevissimo tempo ritornano alla norma.
- 3° Lungi dall'atrofizzarsi — come vogliono parecchi trattati di patologia chirurgica — le cicatrici vanno evolvendosi, e, se non giungono a fornirsi di peli e di ghiandole, possono però lentamente conseguire un buon grado di sensibilità.
- 4° La sensibilità nelle cicatrici si ristabilisce procedendo, nella grande maggioranza dei casi, unicamente dai bordi.
- 5° Nel ritorno delle sensibilità, molto frequentemente si può osservare una dissociazione della medesima, per modo che la sensibilità tattile sopravanza la dolorifica, e talora questa la termica. In qualche caso mi parve certa una dissociazione della sensibilità pel calore da quella pel freddo.
- 6° Il restauro della sensibilità non raggiunge il grado primitivo di perfezione, che attraverso ad un tempo lunghissimo: per le lesioni d'una certa estensione sono necessarî talora parecchi anni. Sul decorso di tale processo esercita benefico influsso lo stimolo funzionale.

Patologia. — Sui fenomeni di temporaneo scompenso funzionale nel decorso del gozzo endemico. Nota del dott. LUIGI MUNARON, presentata dal Socio B. GRASSI.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

PERSONALE ACCADEMICO

Il Presidente BLASERNA dà il doloroso annuncio della morte del Corrispondente prof. AUGUSTO PICCINI, mancato ai vivi il 15 aprile 1905; apparteneva il defunto Corrispondente all'Accademia sino dal 17 luglio 1894.

MEMORIE
DA SOTTOPORSI AL GIUDIZIO DI COMMISSIONI

F. ZAMBONINI. *Ricerche su alcune zeoliti*. Presentata dal Socio STRÜVER.
M. BATTAGLIA. *Tripanosoma Vespertilionis*. Presentata dal Socio TODARO.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario CERRUTI presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando quelle dei Corrispondenti PASCAL e RAJNA M.; richiama inoltre l'attenzione della Classe su di un *Testo sinottico dei documenti destinati a servir di base alle discussioni del Congresso internazionale di nomenclatura botanica di Vienna, del 1905*, redatto dal relatore generale J. BRIQUET; sul fascicolo 39° contenente i *Risultati delle Campagne scientifiche* del Principe ALBERTO DI MONACO; e presenta infine un manuale in due volumi, sulla *Mecanica razionale*, del prof. R. MARCOLONGO e ne discorre.

Il Socio LUCIANI fa omaggio del vol. II, parte I, della sua opera: *Fisiologia dell'uomo* e ne parla.

Il Socio CANNIZZARO offre a nome dell'autore prof. MOISSAN, due nuovi volumi del *Traité de Chimie minérale*, e precisamente il II: *Metalloïdes*, ed il IV: *Métaux*.

CONCORSI A PREMI

Il Segretario CERRUTI annunzia che il prof. A. BARBÈRA ha dichiarato di ritirarsi dal concorso al premio Reale per la *Fisiologia normale e patologica*, del 1903.

CORRISPONDENZA

Il Segretario CERRUTI dà conto della corrispondenza relativa al cambio degli Atti.

Ringraziano per le pubblicazioni ricevute:

L'Accademia delle scienze di Nuova York; l'Accademia di scienze ed arti di Barcellona; la Società zoologica di Tokyo; i Musei di storia naturale di Amburgo e di Nuova York; l'Osservatorio di San Fernando.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 7 maggio 1905.

- Angelis (de) d'Ossat G.* — Il concetto individuo nei Zoantari fossili. Roma, 1905. 8°.
- Id.* — Fauna coralina del Pipaptense de Cataluña. Avance de una memoria sobre la misma. (Memorias de la R. Academia de Ciencias y Artes de Barcellona. III epoca. Vol. V, N. 5). Barcellona, 1905. 4°.
- Angelitti F.* — Il problema della forma della terra nell'antichità. (Discorso premesso al Calendario astronomico commerciale di Palermo per l'anno 1905). Palermo, 1905. 4°.
- Id.* — Sullo stato del R. Osservatorio astronomico di Palermo e sui lavori in esso eseguiti durante il quinquennio 1899-1903. (Pubblicazioni del R. Osservatorio di Palermo). Palermo, 1904. 4°.
- Id.* — Studio della flessione del cannocchiale del circolo meridiano di Pistor e Martius con osservazioni fatte dal 20 novembre 1901 all'8 gennaio 1902. (Pubblicazioni del R. Osservatorio di Palermo). Palermo, 1904. 4°.
- Baratta M.* — L'acquedotto pugliese e i terremoti. Voghera, 1905. 8°.
- Belar B.* — Cancani A. (Sonderabd. der Monatsschrift « Die Erdbebenwarte » 1904-5) Laibach, 1905. 8°.
- Briquet J.* — Texte Synoptique des documents destinés à servir de base aux débats du Congrès international de nomenclature botanique de Vienne 1905, présenté au nom de la Commission internationale de nomenclature botanique. Berlin, 1905. 4°.
- Bruno.* — Theorie exacte et notation finale de la musique. Porto, 1903. 4°.
- Cancani A.* — (Sonderabdruck der Monatsschrift « Die Erdbebenwarte », 1904-5). Laibach, 1905. 8°.
- Galdieri A.* — Osservazioni sui terreni sedimentari di Zannone. (Isole Pontine). Napoli, 1905. 8°.
- Gori G.* — Tavola per le riduzioni delle letture dei microscopi. (Per servizio interno dell'Osservatorio di Palermo). Palermo, s. a. 4°.
- Largaiolli V.* — Le Diatomee del Trentino. 1 - Il Fiume Noce. (Estratto dagli Atti dell'Accademia scientifica Veneto-trentino-istriana. Classe I, anno II (1905), fasc. I. Padova, 1905. 8°.
- Id.* — Le Diatomee del Trentino. (XIX e XX Laghi di Molghetto e di Torel-Bacino del Noce). (Estratto dallo « Tridentum » fascicolo II, 1905). Trento, 1905. 8°.
- Lebon E.* — Sur le nombre des nombres premiers de 1 a N. (Extrait des

- Comptes rendus de l'Association Française pour l'Avancement des sciences). Paris, 1904. 8°.
- Littell F.* — The astronomical and astrophysical Society of America. Sixth meeting, Philadelphia, PA., 1904. (Reprinted from *Science*, N. S., vol. XXI, No. 533). Philadelphia, 1905. 4°.
- Luciani L.* — Fisiologia dell'uomo. 1ª edizione, vol. II, parte I. Milano, 1905. 8°.
- Madel W.* — Die wichtigeren Dreiecksaufgaben aus der ebenen Trigonometrie. Berlin, 1892. 8°.
- Michelucci E.* — L'insolazione a Palermo. (Memoria). (Pubblicazioni del R. Osservatorio di Palermo). Palermo, 1904. 4°.
- Millosevich F.* — Rocce propilitiche dei dintorni di Tolfa. Roma, 1905. 8°.
- Moissan H. (et autres).* — Traité de Chimie minérale etc. Tome deuxième: Métalloïdes - Tome quatrième: Métaux. Paris, 1905. 8°. Vol. 2.
- Pascal E.* — Aggiunte ad alcuni teoremi di Clebsch relativi alla costruzione dei sistemi completi di forme invariantive. (Estratto dai « Rendiconti del R. Ist. Lomb. di sc. e lett. ». Serie II, Vol. XXXVIII, 1905). Milano, 1905. 8°.
- Pasquale M.* — Avanzi di *Diodon vetus* nel Miocene inferiore del promontorio di S. Elia presso Cagliari in Sardegna. (Estratto dal « Rendiconto della R. Accademia delle scienze fisiche e matematiche di Napoli ». Fascicoli 2° e 3° 1905). Napoli, 1905. 8°.
- Rajna M.* — Circostanze dell'eclisse solare del 30 agosto 1905 calcolate per tutta Italia e regioni circonvicine. (Estratto dalle « Memorie della Società degli spettroscopisti italiani ». Vol. XXXIV, anno 1905. Catania, 1905. 4°.
- Id.* — Pietro Tacchini. Commemorazione letta nell'adunanza del 9 aprile 1905. (Estratto dal « Rendiconto delle sessioni della R. Accademia delle scienze dell'Istituto di Bologna. Anno accademico 1904-1905). Bologna, 1905. 8°.
- Id.* — Sull'eclisse solare del 30 agosto 1905. Nota letta alla R. Accademia delle scienze dell'Istituto di Bologna nell'adunanza del 12 febbraio 1905. (Estratto dal « Rendiconto delle sessioni della R. Accademia delle scienze dell'Istituto di Bologna ». Anno accademico 1904-1905. Bologna, 1905. 8°.
- Regola per convertire il tempo sidereo in tempo medio. (Per servizio interno dell'Osservatorio). Palermo, s. a. 4°.
- Ribaga C.* — Descrizione di nuovi copeognati (con due tavole litografiche). (Estratto dal « Redia ». Vol. II, fasc. 1°, 1904). Firenze, 1905. 8°.
- Sorauer P.* — Beitrag zur anatomischen Analyse rauchbeschädigter Pflanzen. (dai *Landwirtschaftliche Jahrbücher*). Berlin, 1904. 8°.
- Zona T. e Cantelli F.* — Osservazioni della durata del passaggio del sole al meridiano fatte nel R. Osservatorio di Palermo negli anni 1900-1901.

(Estratto dagli « Atti della R. Accademia di scienze, lettere ed arti », Serie 3^a, vol. VII). Palermo, 1904. 4°.

Zona T. e Cantelli F. — Osservazioni della durata del passaggio del sole al meridiano fatte nel R. Osservatorio di Palermo nell'anno 1902. (Estr. degli Atti della R. Accademia di scienze, lettere ed arti, serie 3^a, vol. VII). Palermo, 1903. 4°.

Zona T. e Sartorio G. W. — Protuberanze solari osservate nel R. Osservatorio astronomico di Palermo nell'anno 1894. (Pubblicaz. del R. Osservatorio di Palermo). Palermo, 1905. 8°.

DISSERTAZIONI ACCADEMICHE
DELLE UNIVERSITÀ DI BASEL, JENA.

I. — BASEL.

Appelberg A. — Die Elektrolyse von geschmolzenen Bleichlorid, in Rücksicht auf die Beziehung von Stromdichte und Stromausbeute. Leipzig, 1903. 8°.

Arbenz E. — Ueber α Ketonsäuren und α Oxolaktone. Basel, 1903. 8°.

Arregger J. — Beitrag zur Kenntnis der zentralen Luxation des Oberschenkels im Hüftgelenk. Leipzig, 1904. 8°.

Batik F. — Ueber unsymmetrische Phenylhydrazinderivate. Basel, 1904. 8°.

Battegay M. — Beitrag zur Kenntnis des Hystazarins. Ueber den Ersatz von negativen Gruppen durch Hydroxylgruppen in ortho-substituierten Diazoniumsalzen. Basel, 1904. 8°.

Beck P. — Ueber Mesaortitis gummosa. Basel, 1903. 8°.

Bloch B. — Die geschichtlichen Grundlagen der Embryologie im Altertum. Halle, 1904. 4°.

Bönnemann F. — Ueber Umlagerungsprodukte der Azonaphtaline. Basel, 1904. 8°.

Braun A. P. — Ueber Bildung, Konstitution und Umwandlung der α Oxolactone. Basel, 1903. 8°.

Buser E. — Sind der hohe Gaumen, Schmalheit und V-förmige Knickung des Zahnbogens, sowie Anomalieen der eine Folge der Mundatmung und des Wangendruckes? Berlin, 1904. 8°.

Buser S. — Beitrag zur Kasuistik der Kinderpsychosen. Liestal, 1903. 8°.

Butterlin J. — Ueber die Bildung von Indazolen aus bromierten o-methylierten Aminien. Mülhausen, 1904. 8°.

Christen R. — Beiträge zur Pathologie u. Therapie der Harnröhrenstrikturen auf Grund einer Reihe von 400 Fällen. Leipzig, 1903. 8°.

Dieterle P. — Studien in der Diphenazonreihe. Loerrach, 1904. 8°.

- Finkbeiner E.* — Die ersten 1010 Fälle der Basler Heilstätte für Brustkranke in Davos-Dorf. Basel, 1904. 8°.
- Fischer E.* — Ueber Umlagerungserscheinungen bei der partiellen Reduktion nitrierter Azofarbstoffe. Budapest, 1903. 8°.
- Forcart M. K.* — Ein Beitrag zur Frage des Antagonismus zwischen Bacterium coli und den Harnstoff zersetzenden Bakterien. Leipzig, 1903. 8°.
- Frank T.* — Cultur und chemische Reizerscheinungen der Chlamydomonas tingens. Leipzig, 1904. 4°.
- Friolet H.* — Beitrag zum Studium der menschlichen Placentation. Leipzig, 1904. 8°.
- Graeter A.* — Die Copepoden der Umgebung von Basel. Genève, 1903. 8°.
- Hafner G.* — Ueber natürlich vorkommende und synthetisch dargestellte gemischte Fettsäureglyceride. Karlsruhe, 1904. 8°.
- Halff J.* — Die marantische Thrombose der Duralsinus (autochthone Sinustrombose). Basel, 1904. 8°.
- Herzog J.* — Ueber die Einwirkung der Salpetersäure auf Dihydroasaron. Rostock, 1903. 8°.
- Heyser R.* — Beiträge zur Kenntnis der Phenetide und Aniside der Thioglykolsäure. Braunschweig, 1903. 8°.
- Hugelshofer A.* — Ueber Spondylitis mit besonderer Berücksichtigung des späteren Verlaufs derselben. Berlin, 1904. 8°.
- Human A.* — Ueber Dichlorhydrochinondisulfosäure und über Azoxybenzaldehyde. Basel, 1904. 8°.
- Kaech M.* — Geologisch-petrographische Untersuchung des Porphyrgebietes zwischen Lago Maggiore und Valsesia. Lausanne, 1903. 8°.
- Kay Thompson M. de.* — Studien zum Siemensschen Kupfergewinnungs-Prozess. Leipzig, 1903. 8°.
- Koch A. A.* — Beitrag zur Bestimmung des Fluors in Wein, Bier und Mineralien. Zürich, 1904. 8°.
- Kuhn C.* — Ueber einige amidirierte Amidosulfone der aromatischen Reihe. Loerrach, 1904. 8°.
- Latzko W.* — Ueber $\beta\gamma$ -Diphenylvinylelessigsäure und ihre Verwandten. Basel, 1904. 8°.
- Lotz W.* — Über Doppelbildung und Drehungsvermögen. Basel, 1903. 8°.
- Martin R.* — Die vergleichende Osteologie der Columbiformes unter besonderer Berücksichtigung von Didunculus strigirostris. Basel, 1904. 8°.
- Masüger A.* — Ueber Osteomalacie. Zürich, 1903. 8°.
- Meerwein H.* — Das Verhalten von Herz und Zunge bei den primären Myopathien speziell bei der Pseudomuskelhypertrophie der Kinder. Basel, 1904. 8°.
- Molle B.* — Ueber die Zusammensetzung des ätherischen Lorbeeröles und zur Kenntnis seines Hauptbestandteiles des Cineols. Berlin, s. a. 8°.

- Münter F.* — Ueber den Einfluss der Doppelbildung auf das Drehungsvermögen einiger optisch aktiver hydrocyklischer und Benzol-Derivate. Basel, 1904. 8°.
- Nikitinsky J.* — Ueber die Beeinflussung der Entwicklung einiger Schimmelpilze durch ihre Stoffwechselprodukte. Leipzig, 1904. 8°.
- Ossipow N.* — Ueber histologische Veränderungen in Spätstadien der Muskeltrichinose. Basel, 1903. 8°.
- Oswald E.* — Ueber Uterusruptur bei manueller Placentarlösung. Leipzig, 1903. 8°.
- Padova R. M. G.* — Ueber Nitroformazyl und Aminoformazyl. Zurich, 1903. 8°.
- Pfeiffer H.* — I. Ueber Metaoxyäthyl-Benzoësäure. — II. Condensationsprodukte aus Aldehyden und Amidodiaethylanilin. Heidelberg, 1903. 8°.
- Reese H.* — Ueber einen Fall von Nierenvenenthrombose bei Chlorose. Basel, 1903. 8°.
- Rosenberger G.* — Beiträge zur Kenntnis der von Fettsäuren sich ableitenden Imidazole. München, 1904. 8°.
- Rossel O.* — Beitrag zum Nachweis von Blut bei Anwesenheit anderer anorganischer und organischer Substanzen in klinischen und gerichtlichen Fällen. Naumburg, 1903. 8°.
- Roth I.* — Ueber intramolekulare Umlagerungen. Strassburg, 1904. 8°.
- Schelle P.* — Beiträge zur Kenntnis der chemischen Bestandteile der Eichen-Gallen. — Ueber die Cyklogallipharsäure, eine neue, in den Galläpfeln vorkommende, cyklische Fettsäure. Leipzig, 1903. 8°.
- Scherb H.* — Beitrag zur Pathologie und Therapie der Cystitis tuberculosa. Basel, 1903. 8°.
- Schwarz G. L. M.* — Zur Kenntnis der Beiden μ -Methylnaphtothiazole. Basel, 1904. 8°.
- Speiser F.* — Ueber Cinnamoyllaevulinsäure und ihre Reduktionsprodukte. Basel, 1904. 8°.
- Strobel M.* — Beiträge zur Kenntnis der 10-Phenanthrenderivate. Basel, 1903. 8°.
- Topalow W.* — A. Ueber die Thiapyronine. — B. Eine Beitrag zur Konstitution der Rhodole. Basel, 1903. 8°.
- Troller V.* — Beiträge zur Chirurgie der Sehne. Luzern, 1904. 8°.
- Tschudin E.* — Ueber das Anilidroocitraconanil und seine Verwandten. Basel, 1903. 8°.
- Urech W.* — Beiträge zur Kenntnis der Oxazinverbindungen. — Ueber einige substantive Farbstoffe der Oxazolreihe. Basel, 1904. 8°.
- Vischer A.* — Ueber Sarcomübertragungsversuche. Tübingen, 1904. 8°.
- Voigt M.* — Die Rotatorien und Gastrotrichen der Umgebung von Plön. Stuttgart, 1904. 8°.

- Vollenbruck A.* — Ueber Fluorindine der Naphtalinreihe. Basel, 1904. 8°.
- Walther G.* — I. Methyläther des 2,6-Dinitrohydrochinons und einige Derivate. — II. p-Amidothiophenol und einige Derivate. — III. Eine Modifikation des Beckmannschen Siedeapparates für Heizung mit strömendem Dampf. Heidelberg, 1904. 8°.
- Webanck P.* — Sur les dérivés bromés des orthoxylidines. — Sur quelques nouvelles Triazines. Basel, 1903. 8°.
- Widmer C.* — Ueber Scheidendrüsen und Scheidencysten. Leipzig, 1903, 8°.
- Willmann A.* — Ueber Synthesen von p-Dialkyldioxychinonen durch Ringchluss. Loerrach, 1904. 8°.
- Wyss A. A.* — Beiträg zur Kenntniss der cystischen Pankreastumoren. Biel, 1904. 8°.
- Wiss O.* — Ueber einen neuen anaëroben pathogenen Bacillus-Beitrag zur Logie der akuten Osteomyelitis. Jena, 1904. 8°.
- Zeller H.* — Beiträg zur Frage der Ernährung bei Typhus abdominalis. 1904. I. I. 8°.

II. JENA.

- Andreae E.* — Inwiefern werden Insekten durch Farbe und Duft der Blumen angezogen? Jena, 1903. 8°.
- Apel R.* — Ueber Trophoneurosen. Gotha, 1903. 8°.
- Bahrman F.* — Ueber die Einwirkung von Alkalien auf den Stoffwechsel fleischgefütterten Hühner. Jena, 1904. 8°.
- Bliedner E.* — Philosophie der Mathematik bei Fries. Coburg, 1904. 4°.
- Berger F.* — Ueber Beschäftigungsneurosen und Beschäftigungsneuritiden, Blankenhain i. Thür. 1904. 8.
- Büchel W.* — Zur Topologie der durch eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung und ersten Grades definierten Kurvenschar. Leipzig, 1903. 8°.
- Buse A.* — Ueber akute Darmwandbrüche. Jena, 1904. 8°.
- Connan J. Mc.* — Beiträge zur Kenntniss der Pyrazole. Jena, 1904. 8°.
- Deye S.* — Ueber Wolfsrachen. Jena, 1904. 8°.
- Freydag R.* — Beiträge zur Kenntniss der Lävulinsäure. Rostock, 1903. 8°.
- Fürbringer. J.* — Ueber Phosphornekrose auf Grund der vom Jahre 1896 bis 1902 in der chirurgischen Universitätsklinik zu Jena beobachteten Fälle. Coburg, 1904. 8°.
- Glänzel K.* — Ueber das Verhalten des Blutdrucks während der Lachgas-Mischnarkose, vom Beginn der Inhalation bis zum Eintritt des Toleranzstadiums. Jena, 1903. 8°.
- Gläsel V.* — Enterospasmus unter dem Bilde des Ileus. Erfurt, 1904. 8°.

- Gössnitz W. v.* — Sechs Fälle von linksseitigem Zwerchfellsdefekt. Jena, 1903. 8°.
- Graul O.* — Beitrag zur Inversio uteri durch Geschwülste. Jena, 1904. 8°.
- Gründler W.* — Ein Fall von vaginalem Kaiserschnitt bei vitium cordis. Jena, 1903. 8°.
- Hall A. A.* — Beiträge zur Kenntnis der Diazoanhydride. Jena, 1903. 8°.
- Härter M.* — Die doppelseitige Implantation der Ureteren in die Blase und ihre Methodik. Jena, 1904. 8°.
- Hartung M.* — Welche Massnahmen sind zu treffen zur Vermeidung des postoperativen Ileus? Jena, 1904. 8°.
- Hartwig E.* — Ueber einen Fall von Eisensplitterverletzung mit nachfolgender Infektion (Heubazillen) und über die dabei gemachte Erfahrung betr. Einführung von Jodoformplättchen. Jena, 1903. 8°.
- Hawthorne J.* — Beiträge zur Kenntnis des Morphins. Jena, 1903. 8°.
- Hecker O.* — Petrographische Untersuchung der Gabbrogesteine des oberen Veltlin. Stuttgart, 1903. 8°.
- Henker O.* — Ueber die Anomalie, die der longitudinale Elastizitätsmodul einiger Borosilikatgläser bei wachsender Temperatur zeigt. Jena, 1903. 8°.
- Hesse H.* — Beiträge zur Morphologie und Biologie der Wurzelhaare. Greussen, 1904. 8°.
- Kaufmann K.* — Klinisch-statistische Zusammenstellung der perforierenden Verwundungen des Augapfels an der Jenaer Augenklinik. Jena, 1904. 8°.
- Knoch R.* — Ein Beitrag zur Kenntnis der cerebrospinalen Lues. Jena, 1904. 8°.
- Kessel H.* — Ueber einen Fall von Doppelperforation des Auges durch Eisensplitter. Jena, 1903. 8°.
- Koch F.* — Ueber perinephritische Abszesse. Jena, 1903. 8°.
- Koch K.* — Ueber Myomenucleation. Leipzig, 1903. 8°.
- Kopitzsch H.* — Ueber das Thiodiazol und einige seiner Abkömmlinge, Jena, 1904. 8°.
- Krüger P.* — Ueber Sulfosäuren der Pyrazolreihe. Leipzig, 1903. 8°.
- Kuban O.* — Zwei Fälle von cystischer Degeneration der Ovarien bei Blasenmole. Jena, 1904. 8°.
- Kündig H.* — Ueber die Viskosität des menschlichen Blutes bei Schwitzprozeduren. Jena, 1903. 8°.
- Lincke H.* — Ueber das dreissigjährige Verweilen eines Eisensplitters im Auge mit anatomischem Befunds. Jena, 1903. 8°.
- Lindeman F. P.* — Casuistischer Beitrag zur Frage der angeborenen klapfenförmigen Verengung der pars prostatica urethrae. Jena, 1904. 8°.
- Lindenhayn H.* — Beiträge zur Kenntnis der Diazoverbindungen. Jena, 1903. 8°.
- Loening F.* — Ueber Oxydation von Eiweiss mit übermangansauren Salzen. Jena, 1903. 8°.

- Lohmann C. E. J.* — Beitrag zur Chemie und Biologie der Lebermoose. Jena, 1903. 8°.
- Maclaren N. H. W.* — Beiträge zur Kenntnis einiger Trematoden (*Diplectanum aequans* Wagener und *Nematobothrium molae* n. sp.). Jena, 1903. 8°.
- Pankow O.* — Ueber das Verhalten der Leukocyten bei gynäkologischen Erkrankungen und während der Geburt. Berlin, 1904. 8°.
- Rauther M.* — Ueber den Genitalapparat einiger Nager und Insektivoren, insbesondere die akzessorischen Genitaldrüsen derselben. Jena, 1903. 8°.
- Reinhard H.* — Ueber einen Fall von Leucosarcom der Iris. Lichtenheim, 1904. 8°.
- Sagianz G.* — Die Leukocytose und das Verhalten der Leukocyten bei der Pleuritis. Jena. 1904. 8°.
- Salkowski E.* — Zur Bewegung eines Punktes auf Rotationsflächen. Berlin, 1904. 8°.
- Sauerbrey L.* — Ein kasuistischer Beitrag zur Torsion des Leistenhodens. Jena, 1904. 8°.
- Schätzel J. D.* — Welche Ursachen bedingen den Rückgang des Tabakbaues in der Pfalz und wie wäre eine Hebung desselben zu ermöglichen? Jena, 1903. 8°.
- Schreiber E.* — Ueber Mesotan. Jena, 1904. 8°.
- Schwabe O.* — Ueber das Bornylendiamin. Jena, 1903. 8°.
- Schweig M.* — Untersuchungen über die Differentiation der Magmen. Stuttgart, 1903. 8°.
- Sessous G.* — Ueber die bei der Düngung mit Ammoniaksalzen entstehenden Stickstoffverluste. Berlin, 1903. 8°.
- Sprockhoff M.* — Beiträge zu den Beziehungen zwischen dem Krystall und seinem chemischen Bestand. Stuttgart, 1903. 8°.
- Stahl E.* — Matthias Jakob Schleiden. Jena, 1904. 4°.
- Steuer E.* — Zur Kenntnis der tertiären Pyrazole. Jena, 1903. 8°.
- Streitberger O.* — Ueber die Implantation des Ureters in die Harnblase. Rudolstadt, 1904. 8°.
- Stüber F.* — Ein Fall von Akromegalie mit schwerem Diabetes und Katarakt. Jena, 1903. 8.
- Tempelhoff H.* — Weiterer Beitrag zur Kenntnis der subkonjunktivalen Bulbusrupturen. Jena, 1903. 8°.
- Wagner O.* — Die Elastizitätszahlen μ (Verhältnis der Querkontraktion zur Längendilatation) des Stahls und des Flusseisens. Jena, 1903. 8°.
- Wagner P.* — Ueber das Verhalten der oberflächlichen und tiefen Reflexe bei der Hysterie. Jena, 1903. 8°.
- Wartapetian S.* — Ueber Morphin- Scopolamin-Halbnarkose in der Geburtshilfe. Jena, 1904. 8°.

- Wendler G. — Untersuchungen über Zusammensetzung und Düngebedürfnis bestimmter typischer Bodenarten Thüringens und über die Wirksamkeit der im Geflügeldünger enthaltenen Pflanzennährstoffe auf diesen Böden. München, 1904. 8°.
- Wolff M. — Das Nervensystem der polypoiden Hydrozoa und Scyphozoa. Jena, 1903. 8°.
- Ziolkowski C. — Der suprasymphysäre Fascien-Querschnitt. Jena, 1904. 8°.
- Zweig K. — Ein Fall von Deciduoma malignum im Anschlusse an Blasenmole. Jena, 1903. 8°.

V. C.